目　录

论古代与中世纪的中国算法*

李　文　林

（中国科学院数学研究所）

计算机技术的发展正在引起数学史家们对算法倾向的日益关注。D.E.克努斯(Knuth)曾研究过古代巴比伦算法。他在其论文[1]的结束语中指出：关于古代中国与印度的算法"有更多东西可说"。本文对古代与中世纪的中国算法作简要的分析探讨。

一　程序、标准程序和子程序

像巴比伦人一样，古代中国数学家表达数学公式的传统方式是逐步列出该公式的计算法则，不过他们的处理比巴比伦人更具一般性。

从《九章算术》开始，中国古算书中每个问题之后都有一段所谓"术"，这实际上是解题公式的逐步计算程序，对于以后出现的同类问题，则或是重复最初的术文，或是千篇一律简单地标明"术如……"。这说明了程序的一般性。以下是"方程"章中的一个例子：

> 今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗，问上、中、下禾实一秉各几何？
>
> 方程术曰：置上禾三秉、中禾二秉、下禾一秉、实三十九斗于右方；中左禾列于右方。

亦即首先将数据排列成如下形式：

1	2	3	上禾
2	3	2	中禾
3	1	1	下禾
26	34	39	实

(i)以右行上禾(3)遍乘中行而以直除(即以遍乘后的中行各项反复减去右行各项，直到上禾为0)；

(ii)又乘其次(左行)亦以直除；

(iii)然后以中行中禾不尽者(5)遍乘左行而以直除；

* 本文系作者在第一届国际中国科学技术史讨论会(Leuven,1982)上的英文报告(On Chinese Algorithms in Ancient and Medieval Times)，首次用中文发表，英文稿曾蒙李约瑟博士、鲁桂珍博士、席文(N. Sivin)教授以及布鲁(G. Blue)先生审阅并提出宝贵修改意见。

(iv)左方下禾不尽者(36)上为法,下为实(99),实即下禾之实。①

接着便是完全类似的计算每秉中禾与上禾所得实(斗)数的程序。这里基本的运算就是所谓"遍乘直除"(即用第一个方程中某未知数的系数乘第二个方程的各项,然后从变换后的方程各项反复减去第一个方程的相应项,直至该未知数的系数为 0)。《九章》的作者称这一线性联列方程的解算过程为"方程术"。在以后的方程类问题中,开头总是说"术曰如方程",有时紧接着列出新的数据——这相当于现代算法语言中的"调用"(Calling)标准程序和给参量"赋予"(Assigning)新值。

对算法结构的讲求到宋代达到了登峰造极的地步。以秦九韶《数书九章》(公元 1247)线性同余方程组的求解为例。在"大衍"章的开头部分,秦九韶设计了一个求解所有"大衍"类(即线性同余方程组)问题的一般程序——大衍总数术。以下是秦九韶程序的总框图:

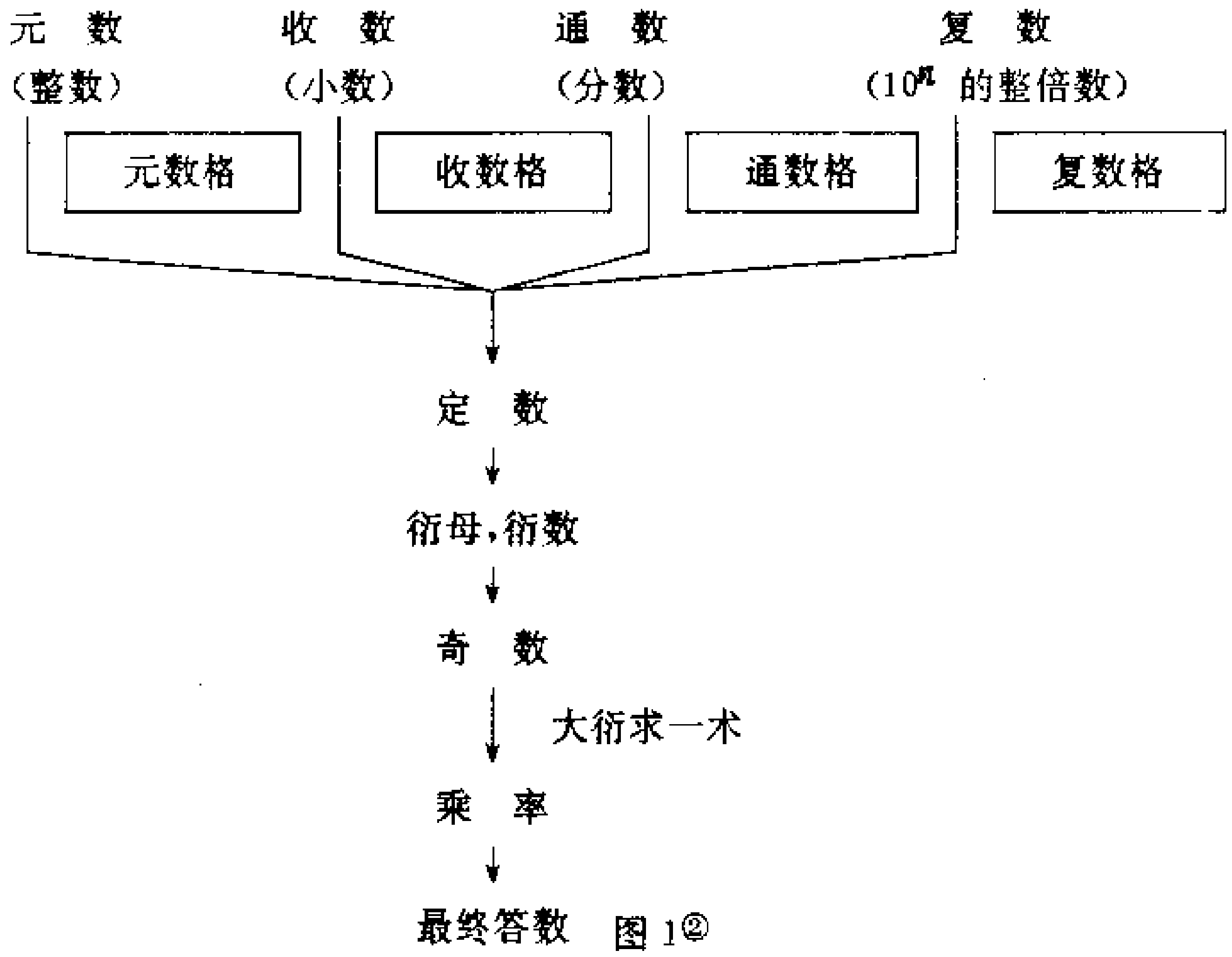


图 1②

这在当时确实是一个巨型程序,尤其值得注意的是,秦九韶程序由若干不同部分组成,它

---

① 术文见《九章算术》卷八"方程"。括号内的文字及编号为笔者所加。

② 用现代代数语言表达,秦九韶的方法大致是:

一次同余组 $x \equiv R_i (\bmod A_i), i=1,2,\cdots,n$ (1)

等价於 $x \equiv R_i (\bmod a_i), i=1,2,\cdots,n$

此处 a_i 是 A_i 的素因数, $L.C.M.(a_1,\cdots,a_n)=L.C.M.(A_1,\cdots,A_n)$,且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两互素。若能求得一组 k_i

满足 $k_i g_i \equiv 1 (\bmod a_i)$ $i=1,2,\cdots,n$

此处 $g_i = M/a_i (\bmod a_i)$, $M=a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$

则 $x=\sum_{i=1}^{n} k_i R_i M/a_i (\bmod a_i)$ 为同余组(1)的解。

秦九韶分别称 A_i 为问数;a_i 为定数;M 为衍母;M/ai 为衍数;g_i 为奇数,k_i 为乘率。

关于大衍总数术的详细介绍可参阅钱宝琮[6],[7]和 Libbrecht[4],李文林、袁向东[3]则对秦九韶求定数的方法作了新的探讨,本文所关心的主要是该方法的算法结构。

们适用于不同的场合。也就是说，秦九韶的总程序中包含了若干子程序，主要有求定数的程序（秦九韶对四种模数—元数、收数、通数和复数的每一种分别设计了计算定数的专门程序，并用一个新的术语“格”来称呼这些子程序，“格”就是子程序）和求乘率的“大衍求一术”。

我们可以用图 2 来表示秦九韶“大衍总数术”程序，其中一个大的程序块包含了若干小程序块，这种“嵌套结构”恰是现代算法语言的一种基本结构。

子程序本身可以被看作是一个完整的程序。秦九韶在计算大衍类问题时就经常直接“调用”求定四格与大衍求一术。当调用这些程序时他总是说：“以××格入之”、“以大衍求一术入之”。

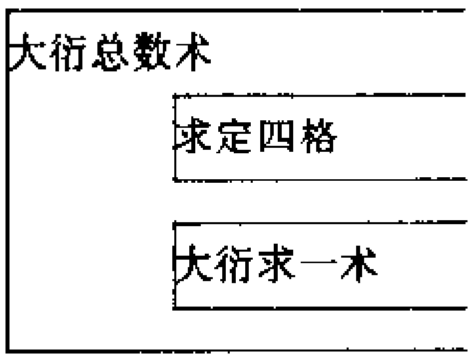


图 2

“大衍总数术”标志着宋代数学家精心讲求算法结构的倾向，从中我们还可以发现其它诸如“循环”与“条件”等算法现象。

二　循环语句与条件语句

“循环”与“条件”是构造非平易算法的两个基本要素。克努斯在其论文〔1〕中曾抱怨说：“在巴比伦文献中很少能看到这类算法现象”。然而在中国数学典籍中却不乏这样的算法结构。

著名的“割圆术”就是一种典型的循环算法过程。刘徽（公元 3 世纪）给出了如下的计算圆内接 2n 边形边长的程序：

(i)割六觚以为十二觚；

(ii)置圆经二尺；

(iii)半之为一尺，即圆里六觚之面也；

(iv)令半经一尺为弦，半面五寸为句，为之求股；

(v)以句幂二十五寸减弦幂，余七十五寸；

(vi)开方除之……得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二；

(vii)以减半经余一寸三分三厘九毫九秒四忽五分忽之三，谓之小句；

(viii)觚之半面又谓之股，为之求弦；

(ix)其幂二千六百七十九亿四千九百一十九万三千四百四十五忽，余分弃之；

(x)开方除之即十二觚之一面也。①

接着便是完全同样的计算 24、48、96 边形边长（觚面）的程序：

割十二觚以为二十四觚；

亦令半径为弦，半面为句，为之求股；

………

即二十四觚之一面也。

割二十四觚为四十八觚；

① 术文引自《九章算术》卷一“方田”刘徽注，编号系笔者所加。

亦令半径为弦，半面为句，为之求股；

………

即四十八觚之一面。

割四十八觚以为九十六觚；

亦令半径为弦，半面为句，为之求股；

………

即九十六觚之一面。

上述各节计算过程之间仅有的差别就是赋予"面"以新值(事实上，刘徽将每一迭代过程结束时所得之值"赋"给下一迭代过程的参量"面")。这里我们就看到了一个循环语句的例子"Do I=1 to N"(此处 N=4，但刘徽的计算一直进行到 N=8)。

至于条件语句，我们重新来考察秦九韶的"大衍求一术"。我们可以用现代符号表述秦九韶的"大衍求一术"程序如下：

	以奇数 G 除定数 A	得商	余数	计算数 C_i
第 1 步：	即 A/G	q_1	r_1	$c_1=q_1$
第 2 步：	G/r_1	q_2	r_2	$c_2=c_1q_2+1$
第 3 步：	r_1/r_2	q_3	r_3	$c_3=c_2q_3+c_1$
……	……	……	……	……
第 n 步：	r_n/r_{n-1}	q_n	r_n	$c_n=c_{n-1}q_n+c_{n-2}$

若 $r_n\neq1$，继续进行上述运算，否则进行

第 n+1 步： 若 n 为偶数，数 k(乘率)$=c_n$，

否则进行 $q_{n+1}=r_{n-1}-1, C_{n+1}=C_nq_{n+1}+C_{n-1}$

并取 $K=C_{n+1}$。

十分清楚，此程序包含了下列形式的条件语句："IF S_1 GO TO，IF S_2 GO TO，S_3"。

如果深入分析"招差术"、"正负开方术①等其它一些算法，一定会发现更多的算法结构的例子，我们不可能在这里一一列举。不过从上述讨论已经可以看出，在算法设计方面，中国古代数学家已掌握了现代算法语言的一些基本要素。

古代中国数学家们设计的程序，当然是适用于他们的计算工具——算筹的一种"软件"。但不难发现：它们很容易被翻译成现代算法语言而被输入计算机去执行(笔者曾对"割圆术"和"大衍求一术"作过这样的尝试)。这正说明了中国数学家十分重视对一个科学算法的要求(参阅 Rybnikov[8]和 Libbrecht[4])，那就是：

(a)机械化，这种算法必须包含一系列没有二义性的、标准的和易于重复迭代的指令，任何人只要一步一步执行这些指令，必然达到同样的计算结果；

(b)一般性，这种算法能被应用于性质相同的一整类问题；

(c)有效性，从初始数据出发，经过有限步骤的运算，定能得到问题的解答。

---

① 参阅 Lan Lay-yong〔2〕，Libbiecht〔4〕和李文林、袁向东〔3〕。

正如其它许多人类知识领域一样，现代算法语言也有其历史渊源。揭示这种渊源关系，可能是数学史研究的一个新颖而重要的课题。

算法结构的设计与算法本身的创造有密切关系。汉代以来的中国数学家们发展了许多重要的算法①，从而形成了强烈的算法传统。

遗憾的是，与演绎倾向相比，算法倾向的作用往往遭到忽视。然而在数学发展的历程上，算法的创造与古希腊的演绎途径至少可以相提并论。重大数学真理的发现往往是寻求新算法的结果，微积分的创造也许是最有说服力的例子。这一成就乃是算法倾向的胜利（参阅Rybnikov[8]），而牛顿后来用几何方式来处理其流数理论在一段时期内甚至成为英国微积分进一步发展的障碍，同时算法的创造又构成演绎推理的基础。显然，如果没有那些计算面积、体积的巴比伦与埃及算法，就不可能发展出希腊几何；如果没有从开普勒、费马到牛顿、莱伯尼兹的无穷小算法，就不可能有严格的现代分析学。

算法构造与演绎推理是两种不同的数学思维形式。它们在数学史上的作用既不能相互替代，又不是相互排斥的。在这方面，注意到下述事实是有趣的：演绎大师欧几里得曾经不加严格证明地给出了著名的辗转相除算法，并没有人为此而责难欧几里得，或许是因为他的演绎几何名声太大的缘故吧。

事实上，数学的发展似乎呈现出这样的特征，即算法倾向与演绎倾向总是交替地取得主导地位。例如，巴比伦和埃及式的原始算法时期被希腊式的演绎几何所接替；在中世纪，希腊数学则让位于以算法为主导的中国、印度与阿拉伯数学；17、18世纪是无穷小算法的黄金时期；十九世纪以后，演绎数学又重新在更高的水准上繁荣发达起来。这标志着一种螺旋式上升的发展过程。那么在"纯数学"统治了一个多世纪后的今天，情况又如何呢？计算机的广泛渗透似乎正在开始一个算法研究的新时代。因此，数学史研究中对算法倾向的重视乃是十分自然的趋势。

参 考 文 献

〔1〕 Knuth, D. E. Ancient Babylonian Algorithms, Communication of the ACM, Vol. 15, No. 7. 1972.

〔2〕 Lam Lay—yong. The Chinese Connection Between the Pascal Triangle and the Solution of Numerical Equations of any Degree, Historia Mathematica, Vol. 7. No. 4. 1980.

〔3〕 李文林、袁向东："中国古代不定分析若干问题探讨"，《科技史文集》8，上海科学技术出版社，1982。

〔4〕 Libbrecht, U. Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, the Shu—Shu Chiu—Chang of Chin Chiu—Shao, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1973.

〔5〕 Needham, J. Science and Civilisation in China, Vol. 3. Cambridge, 1959.

〔6〕 钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1966。

〔7〕 钱宝琮：《宋元数学史论文集》，科学出版社，1966。

〔8〕 Rybnikov, K. A. On the Role of Algorithms in the History of Mathematical Analysis, Actes du VIII Congres International d'Historie des Sciences, Vol. I, Firenze & Paris. 1958.

① 可参阅 J. Needham〔5〕和钱宝琮〔6〕。

中国古代对角度的认识

李国伟
（台北中央研究院数学研究所）

一　角的定义

除了点、线、面、体之外，角度应该是人类几何直觉不难掌握的一个概念。但是在中国古典的天文、历法与数学中，角度的认识似乎有欠圆满。钱宝琮曾说："中国古代不知利用角度，然有《周髀》测望术，日、月、星辰在天空中地位，亦大概可知矣。"[1]他还说："在后世数学书中，一般角的概念没有得到应有的重视。"[2]关增建则说："中国古代 $365\frac{1}{4}$ 分度方法对于确定天体空间方位是有效的，惟其有效，才阻滞了其他分度方法的产生，导致了角度概念的不发达。"[3]黄一农认为："中国古代的天文家在明末西学传入之前，一直未发展出近似西方几何学完整的角度概念。当量度星体的角大小或两点间的角距离时，文献中所用古度值的意义常因人而异，有时近于现代的角度值，有时则直接以浑仪环上的刻度差来表示，故当以窥管测极星距极度或日、月的体径时，其值往往较今几何学中的角度值大一倍左右。"[4]刘君灿更进一步断言："中国除了直角之外没有一般的角度观念。"[5]

其实角度比点、线等基本几何概念的内涵更为丰富，因此可以从逻辑上等价，但着眼点迥异的方向来认识它。若要讲究起来，现代数学甚至可由向量空间、旋转群等出发，再逐步引入角度的概念。[6]西方古典几何学的代表作是欧几里得的《几何原本》，根据 Thomas L. Heath 的翻译，定义八描述了平面角度的意义：

A plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line. [7]

这个定义在利玛窦、徐光启的《几何原本》中认为："平角者，两直线于平面纵横相遇交接处。"[8]并没有点出"inclination"的意味。Heath 认为 inclination 是欧几里得的创意，因为在他之前一般人是把角看作折曲或折断的线。Heath 还综述了西方古代对角度的种种不同看法，甚至角度应属"质"、"量"还是"关系"哪一种范畴，也引起不少的议论。最后他引用十九世纪末 Schotten 的说法，把角度的定义方式划分为三类：

（一）角是两条直线方向的差别。

（二）角是从一边旋转到另一边的量。

（三）角是两条直线相夹的那部分平面。

既然西方几何学中对角的识识也有几套体系，我们似乎应该更致力厘清中国对角度理解

的递嬗与特色，而不必执著在古代是否有现代角度观念的问题上。

二　技艺里的角度

角是一个非常简单而易见的几何观念，古代人民通过农具、兵器、车辆、乐器的制造不可能不发现角的存在。但是"角"这个字的原意，按《说文解字》是指"兽角"，最初并不用它来称呼几何量。《考工记》里是以"倨句"表示角度，倨表钝，句表锐，正如用"多少"表示量，"长短"表示长。《考工记》的《冶氏》有"已倨则不入，已句则不决，…倨句外博。…倨句中矩。"《稃人》有"倨句磬折"，《磬氏》有"为磬，倨句一矩有半。"《车人》有"倨句磬折，谓之中地。"可见"倨句"是泛指直线的曲折程度，这有点类似欧几里得以前希腊人对角的定义。《车人》中也记载了一些特殊的角，所谓"半矩谓之宣，一宣有半谓之欘，一欘有半谓之柯，一柯有半谓之磬折。"很多论述都由此推算出宣是45°，欘是67°30′，柯是101°15′，磬折是151°52′30″。不过脱离开技艺的场所，这些角度并没有继续发展下去。本来有机会作为一般角统称为"倨句"，后来也不见了踪迹。这一脉最有可能与西方角度观念合流的思路，在中国很令人惋惜的未能发扬起来。

《考工记》还有另一条可以发展出角度的网络。《筑氏》有"合六而成规"，《弓人》有"为天子之弓，合九而成规。为诸侯之弓，合七而成规。大夫之弓，合五而成规。士之弓，合三而成规。"钱宝琮说："这是用圆心角的大小来规定弓背的曲率。"[2]似乎断言过强了。我们只能说用圆弧的长度规定了弓背的弯曲程度，而圆弧有可能引出角度的观念。既使没有把圆心角明确的指出来，圆弧的度量也可以看作是一种与角度在逻辑上等价的系统。这种观念在描述天球上星体的位置与运动方面，更有它不可磨灭的价值。

三　天文里的"度"

中国古代天体运动的度量以太阳的运动为定标准的依据。"天之动也，一天一夜而运过周，星从天而西，日违天而东。日之所行与运周，在天成度，在历成日。"[9]这里所成的度又如何确定呢？"历数之生也，乃立仪、表，以校日景。景长则日远，天度之端也。日发其端，周而为岁，然其景不复，四周千四百六十一日，而景复初，是则日行之终。以周除日，得三百六十五四分度之一，为岁之日数。日日行一度，亦为天度。"[10]因此周天为三百六十五又四分之一度着眼点不在圆心角的度量，而是天体间距离的标定。"度"这个字的本意便是指长度。"度者，分、寸、尺、丈、引也，所以度长短也。"[11]"故体有长短，检以度；"[12]关增建在他的论文中相当清楚说明了这种以长度量天的体系。

《周体算经》卷下明确的记载了分圆的方法："术曰：倍正南方，以正句定之。即平地径二十一步，周六十三步。令其平矩以水正，则位径一百二十一尺七寸五分。因而三之，为三百六十五尺、四分尺之一，以应周天三百六十五尺、四分尺之一，以应周天三百六十五度、四分度之一。审定分之无令有纤微。分度以定则正督经纬。而四分之一合各九十一度、十六分度之五，于是圆定而正。"[13]在这种运作下，圆弧对应的圆心角几乎已经呼之欲出，但是古人的眼光并没有这么看。他们"立表正南北之中央，以绳系颠，…立周度者，各以其所先至游仪度上。车幅引绳，就中央之正以为毂，则正矣。"[14]用对应比例的思想，以地面的尺寸量起天体的度数。但是因为众

星绕极旋转，而所画圆心并不在极下，所以测出的地面弧长并不完全正比于周天的弧长。即使《周髀》体系内的盖天家知道这种偏差，他们也不可能跑到极下去作测量。盖天家说的这种弱点在浑天说中可以得到相当的校正，因为在浑天的模式里，只要把浑仪摆到“地中”，则子午环上的分度就正比与天球上的分度。因此我们可以说，在适当的天体模式下，以弧长作为度量的体系，是逻辑等价于角度，特别是用 radian 作单位的角度体系。只不过这种等价关系有一方，是中国古代不曾自觉认识清楚的。

四　几何里的“隅”与“角”

《周髀算经》虽然在地面画圆分度，但是这种分度方法并没有应用到中国古代的几何体系，去度量不同角的大小。数学中最重要的一个角度概念就是直角，以“矩”作为度量它的工具。所谓“矩者，所以矩方器械，令不失其形也。”[15]但是“矩”在很多场合也指矩形，所以要指矩形的顶角时只好使用另外一个说法“隅”了。“隅”本指房子的角落，例如《论语·述而》有名的说法：“举一隅不以三隅反”。“隅”逐渐普遍用来指各种建筑物的角落，进而在几何上称谓等于直角的角。例如《考工记》有“宫隅之制七雉，城隅之制九雉”。《诗·北风·静女》有“俟我乎城隅”。《周髀算经》有“句广三，股修四，径隅五。”[16]《九章算术·句股》有“东门南至隅步数，以乘南门东至隅步数为实。”[17]

值得注意的是《周髀算经》与《九章算术》的正文，除了以上引用“隅”的例子外，并没有用“角”的文句。或者可推断在这两本书成书的时间，数学家的注意力基本上还在指谓直角的“隅”。由尖锐兽角引申来，有可能指谓非直角的“角”，还未赢得它应有的地位。《汉书·律历志》说：“角，触也，物触地而出，戴芒角也。”[18]“角”的解释虽然脱离开兽角，但仍然是描写尖锐的形状。因为现代中国人已极少使用“隅”字，这种数学术语由“隅”为主，演化到以“角”为主的历史，似乎也反映了由直角走向一般角的认识过程。

三国时期的赵爽在注《周髀算经》时已说过：“隅，角也。”[19]可见到三世纪时“角”的用法至少与“隅”已相当接近了。赵爽用“角”的例子在注文中有“伸圆之周而为句，展方之匝而为股，共结一角，邪适弦五。”[20]在他著名的“句股圆方图”那段论说中有“开矩句之角，…，开矩股之角。”[21]但与赵爽同时代的刘徽在《九章算术》注中，似乎比较爱“隅”字，例如：

“三面，三廉，一隅皆已有幂，”

“阳马之形，方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马。”

“依隅之周半于依垣，”

“两隅相去一丈为弦，”

“满此方则两端之矩重于隅中，”

“令黄幂连于下隅。”[22]

刘徽用“角”的一个为人熟知的例子，是《句股》章开始解释句股形时说：“短面曰句，长面曰股，相于结角曰弦。”[23]此处“相于结角”的说法与前引赵爽注“共结一角”类似，但因刘徽基本上是以“隅”称呼直角，所以这句话的另一种合理解释是：“直角三角形的短边叫句，长边叫股，与短边（或长边）结角的边叫弦”。此处用“角”而不用“隅”，应该是强调所结的角不会是直角。刘徽另一个用“角”的地方是在讨论开方时说：“欲除朱幂之角黄乙之幂，其意如初之所得也。”[24]

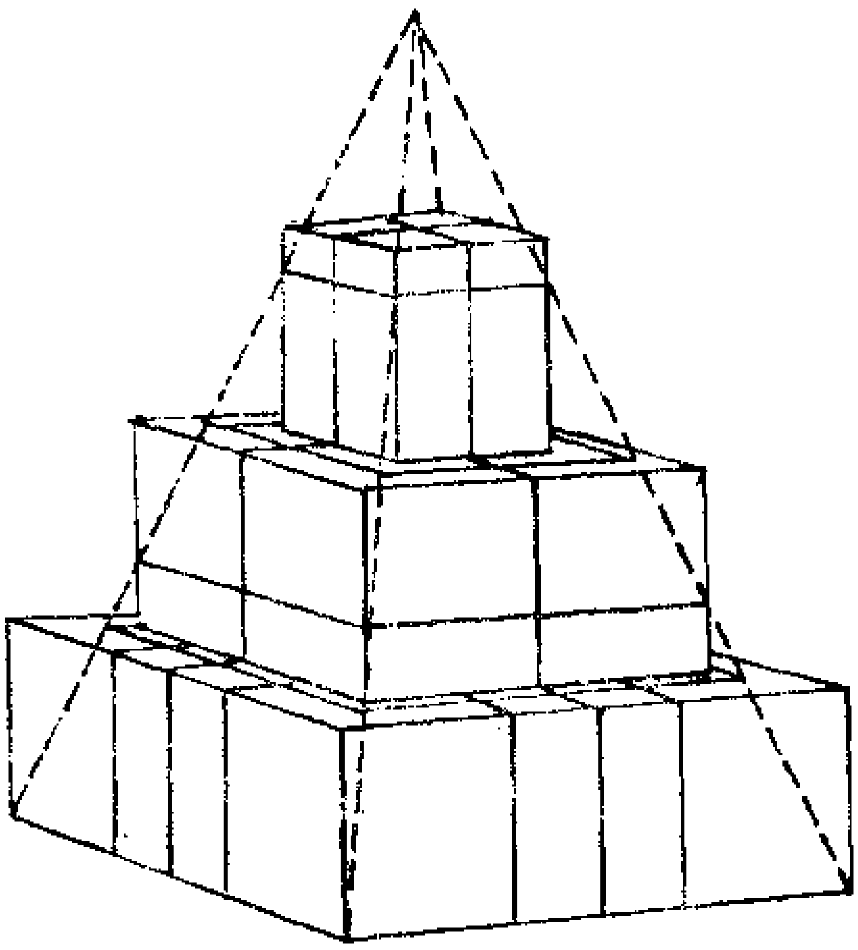
这个“角”字用得相当特殊，因为随后讨论开立方时，又恢复使用“隅”。“隅”字在开方术里的用法为后代的数学书籍承袭下去，衍申到唐初《缉古算经》时，甚至以实、方、廉、隅来说明方程的各项系数。

刘徽以后，在开方术之外，“隅”、“角”出现的场合可举其大要如下。

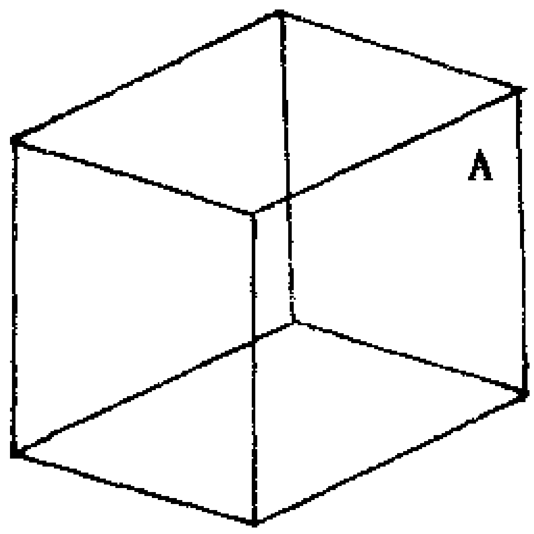
五世纪的《孙子算经》有“今有田，桑生中央，从角至桑一百四十七步，问田几何？…术曰：置角至桑一百四十七步，…”[25]但是此题目中的“角”字，到六世纪甄鸾的《五曹算经》里却又改为“隅”字。

唐朝李淳风注《周髀算经》用过“角隅正方，自然之数”[26]的说法。注《九章算术》用过“自然从角至角，其径二尺可知。…角径亦皆一尺。更从觚角外畔围绕为规，…”[27]此处“从角至角”度量的始终是角的顶点，但是不应把“角”字解释作或等同于“点”字，因为没有角的烘托，点的位置就失去了著落。并且由此可见“角”字使用的意味已渐隐含较广义的角了。

北宋沈括在《梦溪笔谈》里讨论隙积术时曾说过：“刍童求见实方之积，隙积求见合角不尽，益出羡积也。”其中所合之角是一个方锥的顶角（如图一）[28]，所以“角”字也可以指立体角了。



图一



图二

南宋杨辉在《详解九章算法》讨论垛积时，用了“三角垛”、“四隅垛”的名称，还没有把“四隅”称为“四角”。但到元朝朱世杰《四元玉鉴》里已称“四角垛”[29]。对于城墙的四隅也改用四角：“令侵城四角周回撅圆池”[30]。类似《孙子算经》的“桑生田中”题目，变成直田中生出竹，已知“四角至竹各十三”[31]。当“角”把“隅”也取代之后，“角”字真的成为一种统称的名词。

《四元玉鉴》里谈到八角形[32]。到明朝程大位《算法统宗》[33]更是普遍的使用“圆容六角”、“六角容圆”、“圆容三角”、“三角容圆”、“三角田”、“六角形”、“八角形”等，“角”在称呼多边形的用法上已与现代没有什么出入了。

在几何学的剧场内，"隅"由称呼直角的正统地位，逐渐抽象化成开方法的用辞，而被"角"挤出了舞台。这种由"隅"到"角"的演化过程，相当程度地反映了中国古典几何学，从对直角三角形的关注中，逐渐把视线转移到更一般的平面圆形。例如南宋秦九韶《数书九章》卷五田域类的"尖田求积"、"三斜求积"、"斜荡求积"、"计地容民"，就讨论了在此之前未曾有过的题型。虽然秦九韶的公式仍由句股形逐步导来[34]，但在题目的表现上已经脱离句股形的简单堆叠。

五"角"的递嬗

"角"字为什么会由"兽角"逐步提升到对一般角的统称，并不容易从文献中确认它的原委与轨迹。本文当试提出一条看来合理的路径。

兽角衍申的直觉意义自然会包含尖锐感，因此前面引过《汉书·律历志》便曾说："角，触也，物触地而出，戴芒角也。"按《说文》"芒"是指草端，在尖锐的意义上，"芒"与"角"便结合在一起了，也因此对光芒的形容就可以用"角"字。以《史记·天官书》为例，用"角"描述星光的语句可列举如下：

"天一、枪、棓、矛、盾动摇，角大，兵起。"

"库有五车。车星角，若益众，及不具，无处车马。"

"狼、角变色，多盗贼。"

"军星动，角益希，及五星犯北落，入军，军起。"

"其角动，乍小乍大，若色数变，人主有忧。"

"若角动，绕环之，及乍前乍后，左右，殃益大。"

"赤角，犯我城。黄角，地之争。白角，哭泣之声。青角，有兵忧。黑角，则水。"

"小以角动，兵起。…角，敢戏。…顺角所指，吉。"

"赤角有戏。白角有丧。黑圆角忧，有水事。青圆小角忧，有木事。黄圆和角，有土事，有年。"

"青角，兵忧。黑角，水。"

"赤角，犯我城。黄角，地之争。白角，号泣之声。"

"昭明星大而白，无角，乍上乍下。"[35]

这些观察到的芒角，可能是因窥管测象而产生。黄一农以铜管仿制窥管，从实验中证实了这种观察的可能性[36]。其它用"芒"与"角"的例子还有，北周庾季才的《灵台秘苑》中称："动者光体摇动；芒者光耀生芒刺；角者头角长大芒；喜者光色润泽；怒(怒)者光芒威大润泽。"可能是明朝刘基所辑，但托之唐朝李淳风所撰的《观象玩占》里，芒角已有更量化的定义："光曜外出生锋曰芒，五寸以下谓之芒；芒而长四出曰角，一曰七寸以上谓之角。"[37]

芒角的产生应该是对称的，也就是把芒角的端连起来会形成正多边形。对于正多边形古代也有一个特殊的字"觚"来描述。《汉书·律历志》说："其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚而成六觚，为一握。"[38]刘徽在注解《九章算术》求圆田的方法时，涉及六边、十二边、二十四边、四十八边、九十六边、一百九十二边、一千五百三十六边、三千七十二边的正方形。虽然南宋鲍瀚之刻本及明《永乐大典》本均用若干"弧"，但清朝戴震校为若干"觚"。"觚"字本多从角。这种字源的亲近性以及通过对星光描述的媒介，终致"觚""角"不分。"角"从尖锐的芒角，过渡到宽厚的觚角，再统合了隅角，而日渐成为一般角的统称。

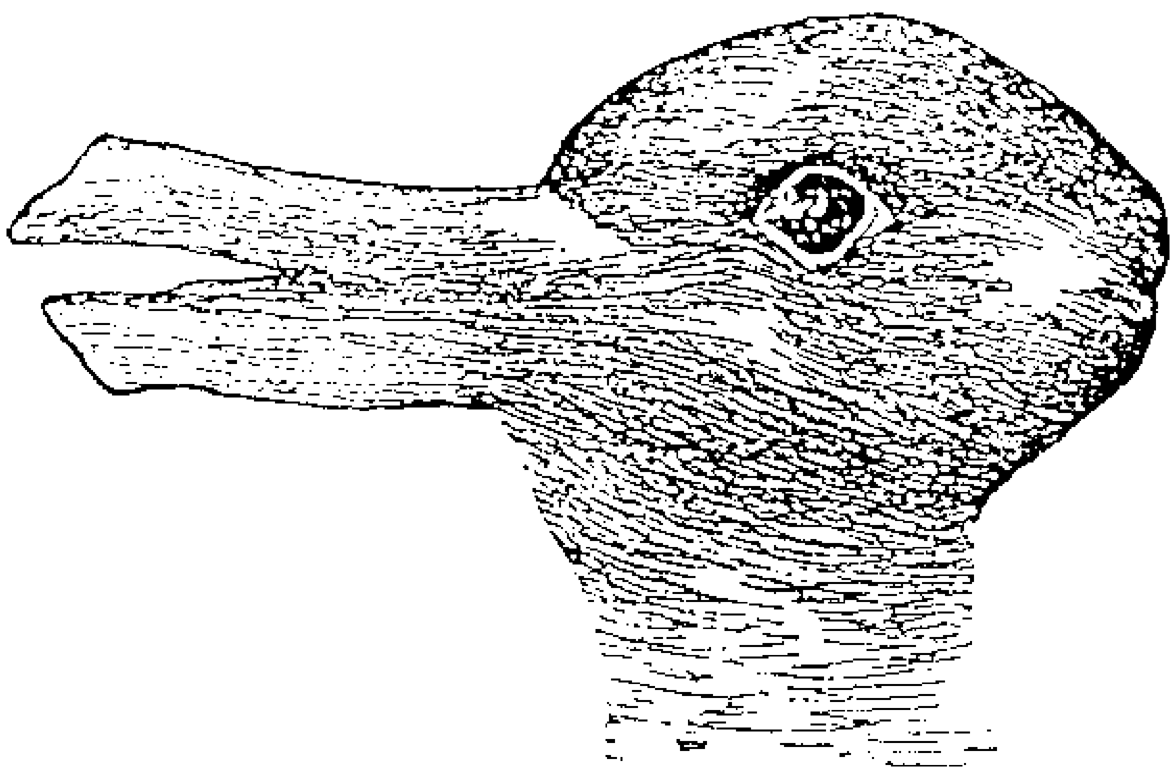
六"角"与"度"的"格式塔"

从前面的讨论，可以看出中国古代对于角度的认识，有三条依循的网络。一条是从来未曾充分发展的技艺路线，另两条是各领胜场的天文与几何的研究传统。天文著重在圆弧的线性度量，而几何著重在过与边的交会空间。这两套等价的系统，如果不曾通过圆心角与圆弧的对应关系统一起来，在角度的认识上是有缺陷的。清圣祖敕编的《数理精蕴》所说："凡圆界，皆以所对之角而命其弧，而角又以所对之弧而命其度。盖角度俱在圆界，而圆界为角度之规也。"[39]这种"角"与"度"藉由圆而贯通的统一认识，已经是中国人学习过欧几里得《几何原本》后的水平。

从史实上看，中国几何的"角"与天文的"度"，没有自发的统合到一个整体的认识中。但是要问为什么会如此，恐怕就成为一个无法回答的问题了。退而求其次，我们也许可以找出某些人类认知的模式，说明这种分裂的状态并非全属意外。

我们用来作为参考的模式，取自视觉功能的"格式塔"(Gestalt)现象。当人观察某些特殊的图像时，会因为脑中组织视觉信息的方式不同，而把图像解释成不同的物件。最突出的地方是当图像被看作是一种物件时，便无法同时被看作另一种物件。多数人稍加指点，便可由一种视讯翻转(switch)成另一种视讯，但有些人就套牢在自己一开始的解释中，非常不容易翻转到其它的视讯。

现在举几个著名"格式塔"的例子。图二的立方块是 louis Albert Necker 在 1832 年公布的，其中字母 A 可看作在方块的前面，也可以看作在方块的底面。图三是 Joseph Jastrow 在 1900 年举的例证，可看成一只嘴向左的鸭子，也可看成一只嘴向右的兔子，但是就是无法同时看出鸭子与兔子。图四是漫画家 W. E. Hill 在 1915 年发表的，标题就叫作"我的妻子与我的岳母"。图五则是 1915 年 Edgar Rubin 发现的一种暧昧图像，可看成是白色的花瓶，或两张黑色相对的面孔侧影[40]。

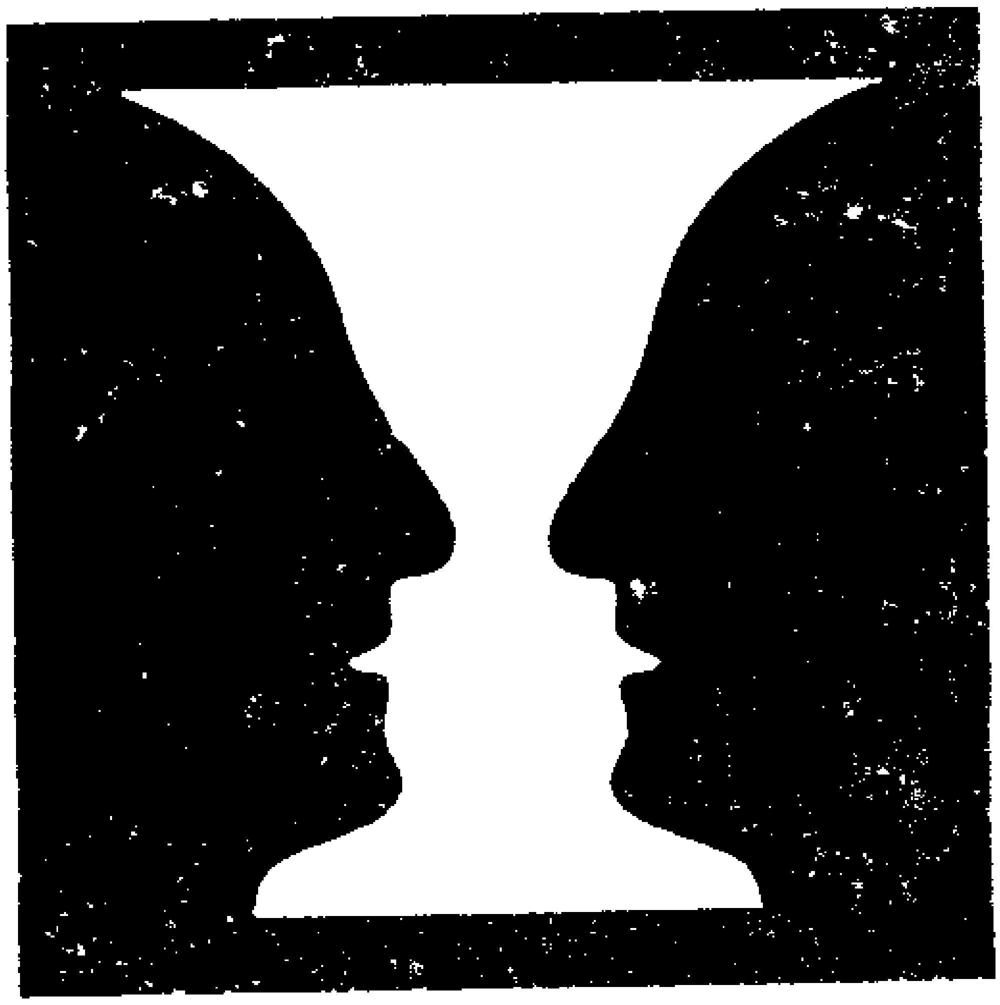


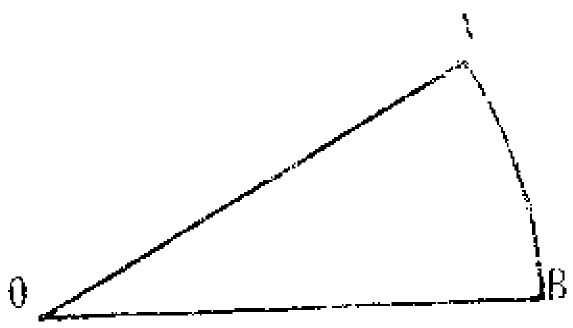
图三

图四



图五





图六

这些例子提供的意义是，一幅图像本身虽然只是一些几何线条所构成，但是当心智的解释作用加进去之后，就会解释成可互相翻转切换的不同样式。而且人常常还会囿囿在一种看法中，无法轻松的转入另一种看法。

对于角度的认识，我们可用图六作模拟说明。其中AOB是圆心角，AB是圆弧。中国古代天文学所看到的角基本上是AB这段圆弧的"度"，几何学所看到的角基本上是AO、BO这一对共顶点的边，而西方很长久以来著重在从BO扫到AO所撑开的空间。这三种看法在逻辑上都可以等价的描述角度，但它们也像"格式塔"图像中的三个面貌，在同一个存身空间里，各自占据一个认知的焦点。我们利用"格式塔"解说中国古代"角"与"度"未能贯通的现象，并不是说西方人是因为看到图六的这种图形，便通过夹边间的二维空间把角的认识统一起来。我们只是用"格式塔"模式的比拟，说明中国古代天文研究传统的认知与几何研究传统的认知，好似各囿于"格式塔"的一方，而未能自发的提升到整体统一，但面相可互换的认识层面。由此看来，中国古代角度观念不发达的因素，并不在于分度法的良否，却在于代表几何的"角"与代表天文的"度"，未能彻底贯通成量天测地一律适用的"角度"。

〔附记〕席泽宗、陈良佐、刘君灿、黄一农诸先生对本文初稿提供宝贵的改善意见，谨此致谢。

参考文献

〔1〕 钱宝琮："周髀算经考"，《钱宝琮科学史论文集》，科学出版社，北京，1983，第126页。

〔2〕 钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，北京，1981，第15页。

〔3〕 关增建："传统 $365\frac{1}{4}$ 分度不是角度"，《自然辩证法通讯》第11卷第5期(1989)，第77－79页。

〔4〕 黄一农："极星与古度考"，将刊于《中国科技史研究》第1集，联经出版事业公司，台北，1991。

〔5〕 刘君灿："影响中国传统数学发展的动力因初探"，《淡江史学》第2期，1990，第61－71页。

〔6〕 请参看 Jean Dieudonne，Linear Algebra and Geomertry，Hermann，Paris，1969，P. 92.

〔7〕 Thomas L. Heath，The Thirteen Books of Euclid's Elements，Dover，New York，1956，Volume 1，P. 176.

〔8〕 利玛实口译，徐光启笔受，《几何原本》，收于《天学初函》，台湾学生书局影印，台北，1978，第四册，第1953页。

〔9〕 《续汉书·律历志》收于《历代天文律历志汇编》，中华书局，北京，1976，第五册，第1509页。

〔10〕 见〔9〕所引书，第1511页。

〔11〕 《汉书·律历志》收于〔9〕所引书第1392页。

〔12〕 见〔9〕所引书第1453页。

〔13〕 钱宝琮点校《算经十书》，中华书局，1963，上册，第58页。

〔14〕 见〔13〕所引书，第58－59页。

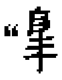
〔15〕 《汉书·律历志》收于〔9〕所引书第 1396 页。
〔16〕 见〔13〕所引书第 14 页。
〔17〕 见〔13〕所引书第 255 页。
〔18〕 见〔9〕所引书第 1383 页。
〔19〕 见〔13〕所引书第 14 页。
〔20〕 见〔13〕所引书第 13 页。
〔21〕 见〔13〕所引书第 18 页。
〔22〕 以上六例见〔13〕所引书第 153 页、第 167 页、第 175 页、第 246、第 248 页、第 252 页。
〔23〕 见〔13〕所引书第 241 页。
〔24〕 见〔13〕所引书第 150 页。
〔25〕 见〔13〕所引书、下册，第 299 页。
〔26〕 见〔13〕所引书第 28 页。
〔27〕 见〔13〕所引书第 106 页。白尚恕(《九章算术注释》，科学出版社，1988，北京，第 50 页)认为"角径亦皆一尺"应该是"角径二尺"。
〔28〕 图一采自《梦溪笔谈译注·自然科学部分》，安徽科技出版社，1979，第 115 页。
〔29〕 朱世杰撰，罗士琳补草，《四元玉鉴细草》，台湾商务印书馆，台北，1968，第 121 页。
〔30〕 见〔29〕所引书第 203 页。
〔31〕 见〔29〕所引书第 438 页。
〔32〕 见〔29〕所引书第 121 页。
〔33〕 程大位:《算法统宗》，易学出版社，台北，1986，翻印光绪九年扫叶山房木雕版。
〔34〕 参见钱宝琮，"秦九韶《数书九章》研究"，收于《宋元数学史论文集》，科学出版社，1985，第 81—84 页。
〔35〕 以下例句均引自高平子，"史记天官书今注"，收于《高平子天文历学论著述》，中央研究院数学研究所，台北，1987，第 274—341 页。
〔36〕 黄一农:"中国古代窥管考"，《科学史通讯》第 8 期，1989，第 28—37 页。
〔37〕 有关"喜、怒、芒、角"术语的用法，参见黄一农手稿，"中国古代天文中星体亮度术语初探"。
〔38〕 见〔9〕所引书，第 1382 页。
〔39〕 清圣祖敕编，《数理精蕴》，台湾商务印书馆，台北，1957，第 19 页。
〔40〕 图二、图三、图四均采自 Fred Atteneave, Multistability in perception, Scientific American, December, 1971, p. 62—p. 71，图五采自 Donald D. Hoffman, The interpretation of visual illusions, Scientific American, December, 1983, p. 137—p. 144.

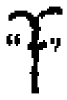
“纵横图”的考古学探索

陆思贤
（内蒙古文物考古研究所）

一 纵横图渊源于太阳方位的观侧

人类对于太阳方位的观测甚为古老，甲骨卜辞有东西南北中五方位的记载，如东字作“”[1]，义为日出林莽为东，指的就是太阳方位；又中字作“”[2]，义为四方中央的旗杆，以方框表示方形的阵地，正中树立旗杆，方框框下为旗杆在地面的投影，当旗杆与投影正中垂直时，便是“中”，也即太阳上中天时的晷影，萧良琼同志据甲骨卜辞有“商王立中”的记录，推定商代有立杆测影。[3]

由此上溯到新石器时代，先民们用“图腾柱”观测太阳影子，例如大汶口文化先民们的图腾柱作“”形[4]，取形于柱头顶上落着一只“太阳鸟”，释“”[5]，也即古史传说太皞、少昊的出典。《说文》：“皞，日出貌，从日告声”；又“旰，晚也，从日干声。<春秋传>曰：日旰君劳。”三个字意义结合在一起意为：从清早太阳升起，皓日经天，到傍晚太阳落入地平，这一天的太阳运动称“皞”，字从“”，是太昊或少昊族的图腾柱；所谓“日旰君劳”，是说太阳影子在圭表上已经消失，而国君还在辛苦地工作呢！“旰”字从“干”，用于立杆测影的图腾柱简称“干”。

查甲骨文、金文干字作“”，是为最简化的“羊角柱”的象形；金文还有“”字[6]，应是竖立羊角柱的地平日晷。再上溯新石器时代的考古资料中，西安半坡遗址出土的彩陶器上有羊角柱图案，作“”形[7]，它是半坡先民，也即羌族先祖的图腾柱。这个羊角柱的每一细部，都表示了角的含义：柱体是两根木杆相交的“角柱”，角柱分成四段，下面三段的中间，各夹了一个小三角形，实际分成了三段六节；顶上一段，画一根中垂线，中分顶角，占的是一段两节；整个角柱，实际是“四段八节”，即每段两节的八等分。顶角上又支分出两个弧形弯角，一似盘角羊的角盘，角盘中分别画两个或三个星点符号，表示东方的角（角宿）与西方的角（觜宿）。

半坡先民利用这种羊角柱测影，当中分顶角的小木柱与角柱中三个小三角形的顶点，垂直落于地平一点时，就保证了羊角柱的垂直；角柱夹角的空隙，控制了太阳上中天时的晷影，能落在南北纵线上；在南北纵线上，应有与羊角柱对应的“四段八节”分度线。定节令时，以中分角柱顶角的小木柱为标准，当太阳上中天时，小木柱的晷影正落在地面纵线“四段八节”时，便是一年的春季或秋季；此时，在羊角柱的两个角盘中，或夜观象宿，或夜观觜宿。据此，中分羊角柱顶角的小木柱，是观测晷影的标准尺度，后世称“度尺”，表示与夏至影长基本相等，是干支表中“午”字的造字依据，甲骨文中最简练的形象作“”[8]，又表示所据尺度为“一段两节”。先民们绘画纵横图，或以符号或数码表示纵横关系，源出于此。

二　“十”字符号是纵横图的基础

在新石器时代的刻划符号中，纵线“|”形，横线“一”形，以及“十”字纹、“×”字纹等，是表示纵横关系的基本线条，另外还有表示纵横关系的点纹及其他几何图形等①。

从立杆测影的原理考虑，纵线有两种形式：一是表示上下垂直的纵线，应属于空间或立体的；一是表示南北正方向的纵线，应属于平面的。据此，横线符号、十字纹、×字纹等，也应有立体空间的与平面的两种形式。在甲骨文中，横线“一”用为数码一，交叉符号“×”或“X”用为数码五，“十”字符号用为数码七，纵线符号“|”用为数码[9]。在这里，十字符号或十字形图案，是纵横图的基础或最基本的形式。

一竖一横构成“十”字，具有前后左右中，或东西南北中的概念；如果是立面，则具有上下左右中、上下前后中，或上下东西中、上下南北中的概念。甲骨文用为数码七，横长竖短作“十”形，左右等分，上下却不等分，或上面稍长一点，下面稍短一点。又用为十干之首的甲字，作“十”或“田”形[10]，这是等分式的十字形，或等分式的纵横四分格。《说文》：“甲，东方之孟，阳气萌动，从木戴孚甲之象；一曰人头宜为甲，甲象人头。凡甲之属皆从甲。，古文甲始于十，见于千，成于木之象。”简言之，木柱顶端作人头形装饰称为“甲”，所谓“从木戴孚甲”、“甲象人头”，已说清了甲是取形于图腾柱的柱头装饰；又说“甲始于十”，正是甲骨文甲字作“十”的本初形象；又说“见于千，成于木”，甲骨文千字作“”[11]，是侧立的人形，而“成于木”者，又是图腾柱。那么甲之作“十”，是以图腾柱所在为中点而画的正方位十字线，作为十干之首甲字的造字依据，字形又作“田”，表示立杆测影时在地平日晷上有控制四方的范围。大凡干支之名，与立杆测影有密切关系。

由此，甲骨文的数码七，作中分横线，而纵线上下不等长，也可以在立杆测影上得到解释，《说文》：“七，阳之正也，从一，微阴从中衺出也。”所谓“阳之正也”，是太阳运行在中分一年的节令，相当于春分或秋分时，此时日出与日落的晷影，在一正东西横线上，故又说“从一”，过此节令，太阳南迁或北返，称“微阴从中衺出”，而上下纵线不等长，表示冬至太阳上中天时晷影长，夏至太阳上中天时晷影短。此知数码七，有中分一年为冬半年与夏半年的意义，这时羊角柱上的小木柱（度尺），应是投影在地平日晷四段八节（即第七等分点上）的节令，从纵横关系考虑，是传统天文学划分四分天区的依据。

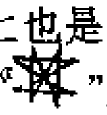
后世以“十”字符号为数码十，《说文》：“十，数之具也，一为东西，|为南北，则四方中央备矣”。此东西南北为地平上正方位的纵横，而“四方中央备矣”，则包括立面或立体（四方体）的纵横。所谓“中央”，可以是两线相交的“交点”，也可以是两立面相交的“垂线”，还可以是多线条纵横相交的“焦点”，在立杆测影时，也就可以得到多种形式的纵横关系。以立杆与地面垂点为交点，可以画出无数纵横辐射线；以立杆本体为一根垂线，可以画出无数纵横辐射面；先民们用图腾柱测影，柱头装饰实是观测晷影的焦点，也就可以画出无数交叉线，占领整个空间，是最标准的“中央”。交叉线的最简单形式作“×”形，它既处于各种纵横关系的中心位置上，故被用为纵横图的基数，并作为中宫之数。

---

① 新石器时代的刻划符号或各种几何图形，已有较多的发现，参阅《西安半坡》、《青海柳湾》等发掘报告。

三　数码五是纵横图的基数

数码五的原始形式是两根斜线相交，在半坡遗址出土的一种彩陶罐上，用“×”形符号绘画方阵图案，作“”形，也有单组作“”形的[12]，如果用数概念去理解，一个五是基础数；三个五纵直排列，表示贯通上下之数；九个五组成方阵，则是上下左右对全能贯通，这与后世以数码1－9画成九宫图的构义是相同的，应是纵横图的最原始形式。又卦爻的“爻”字，也用此交叉符号组成，《说文》：“爻，交也，象易六爻头交也。”爻、交同义，指的是蓍草的纵横交错，“六爻”则应是包括了上下前后左右六个方面的纵横相交，也可以是天地四方六合的纵横相交①。《楚辞・天问》：“天式纵横，阳离爰死。”闻一多《疏证》：“纵横者，式上爻画纵横交午，以象阳阳二气。＜仪礼・大射仪＞‘度尺而午’注：‘一纵一横日午’。＜史记・律书＞：‘午者，阴阳交，故曰午。’午与五通。＜说文＞：‘五，五行也，从二，阴阳在天地间交午也。’古文作×”[13]。这里以“午”为核心，上面说到它是中分羊角柱顶角的小木柱，是测影的“度尺”；以“交午”为测影的要点，“一纵一横曰午”，交午便是观察太阳投影的纵横关系；“午与五通”，交午也即交五，故五字古又作“×”，用交叉符号表示，如上午太阳在东，度尺(午)的投影在西，下午太阳在西，投影在东，在空中可以联成无形的交叉线作“×”形，因其在空中，肉眼不能看见，故读音乌、舞、巫、午；这是“度尺而午”、“午与五通”的具体内容，表示的是以五为基数的立体空间纵横图；故字又作“X”，《说文》谓“从二，阴阳在天地间交午也”。徐弦注：“二，天地也”，五字的上横表示天，下横表示地，数码五布满了空间与地面，但标准的五字只有两个，一个纵面的“⋈”字，一个平面的“X”字，这两个五字结合，构成纵横图的最基本形式。

纵横两个五字，在立杆测影上的意义，本于“午者，阴阳交，故曰午”。与上述“阳之正也，从一”，以春秋分的晷影横线定“十”字线相反，“阴阳交”以二至点定“×”形线。中国传统天文学重视冬至点，甲骨文有“日至”[14]的记录，应包括了冬至与夏至，《说文》：“午，啎也，五月阴气午逆，阳冒地而出。”指的是夏至日，阳气正盛，而阴气也开始萌发。到了十一月冬至，《说文》：“子，十一月，阳气动，万物滋，人以为偁。”滋为孳孵，偁，《说文》释“扬也”，《尔雅・释诂》释“举也”，也是开始活动，是阴去阳生的“阴阳交”。在立杆测影中，夏至日太阳距天顶最近，冬至日太阳距天顶最远，它们与地面的联线，构成立面交叉线，是标准的“阴阳交”，用纵“⋈”形符号表示。此外，夏至日出东北隅，日落西北隅，冬至日出东南隅，日落西南隅，它们在地平日晷上也是标准的“阴阳交”，用横“X”形符号表示。把平面的数码五与立面的数码五组合在一起，得“”形八角星图案②。

---

① 甲骨卜辞或金文中以六个数码构成卦爻，应即“六爻”的出典；又干支表以六甲为头，《易・乾卦》以六龙为首，应是“六爻头交”的具体内容。

② “”形图案用为符号，见于良渚文化(《考古》1990年10期)；用为主体纹样，见于小珀文化(《中国大百科全书・考古卷》32页)、大汶口文化(《大汶口》图版106)、青莲岗文化(《江苏彩陶》彩版25)、大溪文化(《考古》1982年4期)、马家窑文化(《青海柳湾》图谱一(5)：218、219)等。

四　四方八角是纵横图的基本形式

由纵横两个五字组成的八角星图案，有明确的几何形式与数概念：两组面积相等的对顶三角形，中间是正方形。四边之外各是两个直角三角形，总八个直角三角形，确切的形象是“四方八角”，它与日常所见等分式的八角星纹，有严格的区别，但目前已习惯称“八角星纹”，只需表述清楚即可；如果把这种八角星纹的外框用直线联起来，可以画成九宫格，包含的数概念即上面说的，纵行五，横行五，四方八角都是五，加上中宫，合九个五，总和为四十五，即古史传说的所谓“河图洛书数”，应出典于此。

安徽省含山县凌家滩新石器时代墓葬中，出土玉龟与长方形玉版一组三件[15]，出土时长方形玉版夹在玉龟的背甲与腹甲之间，陈久金、张敬国解释为“河图洛书”[16]摘要如下：玉版上线刻两个同心圆，中间小圆内是四方八角的八角星纹图案，解释为“八家是太阳辐射出的光芒”；小圆与大圆之间作八等分弧面，画八个箭牌形符号，大圆之外的四角，又画四个箭牌形符号，解释为“四时八角”，这些与八角星图案表示的“四方八角”是统一的。玉版的四边，左右各五个圆孔；下边四个圆孔，两个为一组，分布于两侧；上边明确的是八个孔，但在边角一孔又相连一小孔，故也可认为是九个孔。如果用八角星图案去考虑这些圆孔的数概念，图案本身是用纵横五字组成，故左右各用五个圆孔，表示上下左右贯通之数；又以二二对分为基础，故下边是两组四孔；具体为四方八角，故上边是八个孔，明确表示这些孔的数概念是与八角星图案统一的；但又衍生出九个孔，数概念也就复杂了。

陈久金、张敬国引《洪范》五行排列顺序解释这些圆孔的数概念，认为即洛书九个数的顺序，《洪范》说：“五行：一曰水，二曰火，三曰木，四曰金，五曰土。”陈、张以为此“一至五为天五行，即生数五行，实即一岁中的前半岁。顺此类推，六曰水，七曰火，八曰木，九曰金，十(五)曰土，这便是地数五行，或称成数五行，实即一岁中的下半年。”陈、张又说：“明白了洛书中四、九与五的关系，再观察玉片图形中四个边沿的钻孔之数，便可发现它与洛书有关。它象徵<洪范>五行中之生数四还原成中宫五，同时又象征成数九还原成中宫五。此数正符合郑玄在<易乾凿度>注中的说法：‘太一下行八卦之宫，每四乃还中央。’五代表中宫之数，太一自一循行至四以后回至中央五。六七八九与一二三四之数相匹配，故太一循行至九乃还至中央五。这便是玉片孔数以四、五、九、五相配的道理。”

陈、张又引《大戴礼记·明堂》中“二九四七五三六一八”九宫格数说：“是中国古代数学史的一个成就，它与天文历法无关。它大约发现于秦汉，而决非原始人所掌握的。”根据上述讨论的八角星图案中的数概念，结合陈、张阐述的理论，对九宫格数作如下探索：

陈、张以五为中宫的“六七八九与一二三四相匹配”在甲骨卜辞中有如下一例，《殷墟文字缀合》第一九九片的数码排列顺序如左：

$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
6	5	4	4	5	6
9	8	7	7	8	9
	2	1	1	2	
	4	3	3	4	
	6	5	5	6	
	8	7	7	8	
		9	9		

数码上加横道者，为原甲残损部分。上面两组是数码 1—9 的相向对称排列，合于五为中

宫，六七八九与一二三四相匹，其左右对称者，正合"生数"与"成数"的理论。下面两组是奇数与偶数的纵横相配，且均归于九，合于"成数九"的理论。这里以上面两组九宫格数说，纵横交叉各三个数，三数之和，除四边得不到十五之外，中间的"十"字形纵横，二五八、四五六，对角的"×"形纵横，一五九，三五七，三数之和都是十五。按"太一循行至九"的方法去旋转，中宫不动，四边数码顺序旋转一周，其"十"字形纵横与"×"形纵横的三数之和，也都是十五，但四边不合。如果数码 1 放在四边的中间，可得如下几种形式：

	A			B		
第	2	1	4	4	1	2
一	3	5	7	7	5	3
组	6	9	8	8	9	6
第	4	7	8	8	7	4
二	1	5	9	9	5	1
组	2	3	6	6	3	2
第	8	9	6	6	9	8
三	7	5	3	3	5	7
组	4	1	2	2	1	4
第	6	3	2	2	3	6
四	9	5	1	1	5	9
组	8	7	4	4	7	8

第	2	9	4	4	9	2
五	7	5	3	3	5	7
组	6	1	8	8	1	6
第	6	7	2	2	7	6
六	1	5	9	9	5	1
组	8	3	4	4	3	8
第	8	1	6	6	1	8
七	3	5	7	7	5	3
组	4	9	2	2	9	4
第	4	3	8	8	3	4
八	9	5	1	1	5	9
组	2	7	6	6	7	2

这是"太一循行至九"中的四种形式，其"十"字形纵横与"×"形纵横的三数之和均是十五，而四边三数之和则不合。现在还不明"生数四还原成中宫五"、"成数九还原成中宫五"的深层含义是什么？依据八角星图案提供的"纵横交午"的启示，又原甲片下面两组奇数与偶数相对排列的方法，在每组九宫中 A 与 B 作"十"字形或"×"形相匹配的数码换位，可得如上右边的形式：

第一组 A 与 B 中的 1、3、7、9 匹配换位，得第五组；

第二组 A 与 B 中的 2、4、6、8 匹配换位，得第六组；

第三组 A 与 B 中的 1、3、7、9 匹配换位，得第七组；

第四组 A 与 B 中的 2、4、6、8 匹配换位，得第八组。

此五、六、七、八组九宫格，总八种形式，均合于洛书数，第五组 B 又合于"戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足"[17]的布局，其他各式均由此作四方八角正反旋转即得，陈久金、张敬国说"它与天文历法无关"，但从具体内容看，它出于方位观测用数，《大戴礼记》用为明堂九宫①，注："记用九室，谓法龟文，故取此数以明制也。"所谓"记用九室"，是说这些数字与建筑

① 明堂九宫参阅《吕氏春秋·四对纪》、《礼记·月令》等，中央的"大庙大室"；东宫"青阳"分左个、右个，"个"即"角室"，雅言"个移"；南宫明堂也分左个、右个；西宫总章左个、右个；北玄宫左个、右个。总四方八角为九宫，如用平面图表示，可作"亞"形。《甲骨文编》"宣"字条引《掇一·四九五》"于南宣占"，《说文》："宣，天子宣室也。"谓一年四季旋转居住的殿，今殷墟所在有洹水，也出此义。《淮南子·本经训》："桀纣为旋室"。注："室施机关，可以转旋也。"旋、宣同义，均本于立杆测影、天象旋转而说。明堂九宫远溯于远古的观象台，即灵台。

设计有关;又说"谓法龟文",明确龟甲占卜用数是洛书的形式之一。被认为是洛书的含山玉版,出土时夹在玉龟的背甲与腹甲之间,也反映占卜用数与洛书的关系。为此,对"河图洛书"的传说,也需做简要探索。

五 关于"河图洛书"

"河图洛书"的传说是中国文明起源中的一件大事,《书·顾命》说:"天球、河图在东序",大约周初不确有河图。《易·系辞上》说:"成天下之亹亹者,莫大乎蓍龟,是故,天生神物,圣人则之;天地变化,圣人效之;天垂象见吉凶,圣人象之;河出图,洛出书,圣人则之。"注引《正义》:"《春秋纬》云:河以通乾,出天苞洛以流;坤吐地符,河龙图发,洛龟书感。河图有九篇,洛书有六篇。孔安国以为河图则八卦是也,洛书则九畴是也。"这里说明了河图洛书是与天文地理、筮法占卜有关,"河以通乾"者以天汉与大河相比,故"河龙"即苍龙;"坤吐地符,河龙图发"者,乃苍龙出地的天象,故"洛龟书感",以龟甲进行占卜。殷墟卜辞有"大火"与"启龙"[18]等记录,正是所谓河图洛书的具体内容。后世编成神话传说,"龙马负图出河"、"理龟负文列于背",并与伏羲,夏禹等神话人物附会在一起,河图洛书的本义也就不再被人理解。伪《古三坟书》传:"河图隐于周初,三坟亡于幽厉,洛书火于亡秦,治世之道不可复见。"秦汉以后确实已不知何图洛书为何物。

时隔一千多年,宋代又传出了河图洛书,宋人传"何图"用圈、点联线作方阵排列,奇数用圈,偶数用点,是本于《易·系辞》传"天一、地二、天三,地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天数五,地数五,五位相得,而各有合。天数二十有五,地数三十,凡天地之数,五十有五"的数概念作图。又宋人传"洛书"也用圈,点联线表示,奇数用圈,偶数用点,按"戴九履一,左三右七,二四为肩,六八为足"的位置排列。这种排列方法,能否反映远古的实际,目前还无资料能给予证明,暂可视为宋人的创作。韩永贤同志将这两幅图复原成立体,并用"天圆地方"说的理论一解释"何图"为远古的气候图,"洛书"是远古的罗盘,应说是一个创见,但结论说:"它是游牧时代伏羲创造的罗盘与气候图"[19],却似乎有些强古人之所为了。

在古史的传说中,按"观象制物"名神的原则,伏羲,羲和、常仪,是星神,月神或太阳神,夏禹则是水神或山川土地之神。羲字从羊,即本于先民们用羊角柱测影,也用羊角柱观察天象,星占用羊的肩胛骨,也用猪、牛、鹿等肩胛骨。到了殷商时代,则以牛胛龟版为主,简称"甲骨",也用人骨或其他兽骨。我们现在称"甲骨卜辞"或"甲骨文";如果用古人"观象制物"的原则去定名,甲骨卜辞的形式与内容,与"河图洛书"的名义完全吻合,所谓"龙马负图出河",指的就是牛胛或马胛,在殷墟遗址中曾出土水牛的头骨,说明商代河南地区还有水牛,盛夏匍伏于河滩或水池中,用牠 的肩胛骨刻辞,是名符其实的"河出图";而龟是水陆两栖动物,用于占卜刻辞,又是名符其实的"洛出书。"那么河图洛书指的确是甲骨卜辞,用现代词汇去代替,可名"河洛文化",也就容易理解了。

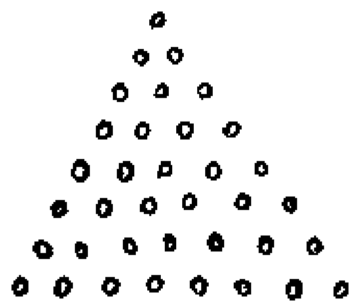
把"龙马出河"①的传说放在星占学与河洛文化的范围去考察,用点或圈表示纵横系关系,可以上溯到新石器时代。河南新郑斐李岗遗址第 38 号墓出土了一件条形石器,长 35 厘米,出

---

① 《书·顾命》注:"伏羲王天下,龙马出河,遂则其之。"

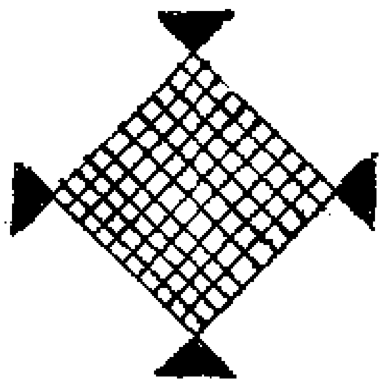
土时放在墓主人的胸脯上[20]，条形石器的两侧都旋有窝点纹，以示天象；一面旋了两个，间距较大，与天上的星空比较，相当于角宿；另一面旋了六个，上下纵列似串珠，其中第二个窝点纹略向左侧偏出，形似马头昂起，与星空做比较，相当于天驷房宿。这两个星座在古代天文学上的意义是明确的，角宿出地俗称"龙抬头"。是春天来到的象征。房宿在中国传统天文学中也称"心房"、"火房"，包括房心尾三宿，被认为是苍龙体，是中国古代的农业指示星。墓主人把这件条形石片放在胸脯上，以示"龙招头"，心肌的再生，也反映了生活在河洛之间的斐李岗文化先民们，待河开雁来，即开始观天象，当房宿在夜晚从黄河水面升起的时候，便是播种节令的开始，也即"龙马负图出河"的天象。这是先民们以点纹为星占内容的一例。

星占用点纹表示，在新石器时代遗址出土的卜骨上，有不少可供研究的资料，在岩画上、其他器物上，也有类同的内容。连云港将军崖岩画有一幅天象图，总体作三角形平面布局，星座带作四段分，反映了四分天区已有古老的传统[21]。而点纹或圆圈纹具有数概念的，在新石器时代的陶器上较多，如三角形平面中的点纹、菱形格中的点纹、网纹格中的点纹、圆圈纹中的点纹、方形平面中的点纹，等等，举一、二例说明：



西安半坡遗址、宝鸡北首岭遗址出土的陶器上，用三角点纹作三角形平面或倒三角形平面排列，常见的顺序 1、2、3、4…或…4、3、2、1，和为 10↔10，以示上下贯通之数，有明确的巫术效应[22]。半坡遗址出土的一件陶片上，用戳点圆圈纹相间排列成正三角形与倒三角，较完整的一个三角形点阵，可以从 1 数至 8，如右图所示。

总 36 个圈点[23]。它们的纵横关系是水平线与斜线的交叉，如果与倒三角形组合在一起，则是"X"形交叉。再从纵线与横线的关系来考虑，则是奇数 1、3、5、7，偶数 2、4、6、8，分别相间在一条垂线上。这给我们一个启示：半坡先民只少有 1－8 个顺序数的观念，并且作"金字塔"式的点阵排列，明确表示已会做整数累加的计算。我们假设半坡先民的累加数曾排列过 9 或 10，其和分别是 45 与 55，也就是传说中的所谓"河图数"与"洛书数"。但资料缺如，半坡先民似乎还没有河图数或洛书数。"天数五、地数五"的奇偶分开累加法，也没有明确表示。45＋55＝100，即河图数与洛书数的和，半坡先民有一种几何图形的表示方法，如右图所示。



这个图的主体是斜置的正方形即正菱形，每边作十等分，10×10＝100 个小方格；四边延长画四个面积相等的直角三角形，总体表示"四方八角"，实是以平面的形式表示立方体①，我们假如以立方体去对待，则实际表示的是 10×10×10＝1000 个小立方体。这个图案习称"鱼网纹"，它与"人面鱼纹"组合成彩陶盆的内彩。"人面鱼纹"一般被解释为图腾[24]，根据不同的形象变化，又表示了月相的周期[25]，由此，这个网纹的绘制是与天象观测有关。上引《说文》："甲，东方之孟，阳气萌动，从木戴孚甲之象；一曰人头宜为甲，甲象人头。凡甲之属皆从甲。 .古文甲始于十，见于千，成于木之象。"甲何于"象人头"？为什么"始于十，见于千"？在这套图案中得到了明确的回答。上面说过，甲本原于立杆测影用的图腾柱，图腾柱分成四段八节（八等分），如

① 《西安半坡》1963 年版图一二四：17，图版壹壹伍；1982 年版图 84、107、112，文物出版社。原图两组，与两组"人面鱼纹"配合，绘画于彩陶盆的内腹，各面面相对为四分式。

晷形回至三段六时(六等分;夏天的开始,故曰"阳气萌动"),则斜边是五段十节(十等分,十乌神话、十日神话本于此),可以得到 $3^2+4^2=5^2$ 或 $6^2+8^2=10^2$ 的勾股定理。半坡先民既然使用了羊角柱测影,又绘画了这幅 10×10=100 方格的几何图形,那么勾股定理的发现,也可溯源于此。而所谓何图数与洛书数等,也应是立杆测影时探索数关系时所得。

六　甲骨卜辞中的"纵横图"

在商代,河洛文化要高出于其他边远地区,为各方国所向往,并派遣子弟学习①,陕西岐山凤雏村发掘出西周甲骨文[26],清楚的说明了商周文化的关系,远在渭河流域的周方,既对商先王祭祀,而商先王在天亡灵也册告周方来信。西周卜辞上也记载着洛水与黄河,周文化来自河洛间的商文化[27],那么河图洛书只少是周人对商文化的一种尊称。上面说了河图洛书的传说与甲骨卜辞在形式和内容上有那么多的巧合,那么我们抄录两条甲骨卜辞中的数码排列方阵,对古代关系纵横图的探索以作简单小结:

例一,《殷墟文字缀合》第一〇三片:

$\overline{6}$	$\overline{5}$	4	3	2	1	1	2	3	4	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	10	9	8	7	7	8	9	10	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{8}$	$\overline{7}$	6	5	4	3	3	4	5	6	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{4}$	$\overline{3}$	2	1	10	9	$\overline{9}$	$\overline{10}$	1	2	$\overline{3}$	$\overline{4}$
	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	
	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	6	6	7	8	9	10	
						$\overline{1}$	$\overline{2}$	3	4	$\overline{5}$	

数码上加横道者为断裂残损或缺刻部分,上面是对称的二十四宫格,排列两个河图数加十,和为一百二十;下列如补是残损部分,应是二十宫格,两河图数,其和为一百一十。

例二,《殷墟文字缀合》第三七六片:

$\overline{1}$	2	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	1
5	6	7	8	8	7	6	5
$\overline{1}$1	2	3	4	4	3	2	1
1	2	3	4	8	7	6	$\overline{5}$
1	2	3	4				
	1	2	3				
	1	2	3	3	2	1	
$\overline{1}$	2	$\overline{3}$		3	2	1	

数码上加横道者为断裂残损或缺刻部分,上右为十六宫格,取数最多至 8,重复两次,与上举半坡陶器上以圈点组成的三角形点阵数概念相同,反映远古确有此数阵的排列。左上除取数至 8 之外,又反复取数至 4。下左为九宫格,取数至 3;下右也应是九宫格,但缺刻上排。由上看出,凡数码排列,均在十个基数之内,排至哪一个数,由当时贞卜者决定,而取数至 3、4、5、8、9、10,较为普遍,尤其是数码 4 与 8,有着较特定的意义。《殷墟文字缀合》第一百六〇片,对贞刻了八个"亖"(4)字,每边各为

① 郭沫若:《殷契粹编》第一一六二片:"丁酉卜,其乎(呼)且多方小子小臣其斆(教)爻。"解释说:"据此,可知殷时邻国多遣子弟游学于殷也。"

4.每角又各为4,也即“四方八角”都是4,对前述“四方八角”的八角星纹图案做了文字说明,这片甲骨上又刻了“王教众”三字,说明殷王是在以“四八分”的排列方教导众人,那么,古代的纵横图,也以四个分为基础,这也就是立杆测影的基本方法。

参 考 文 献

〔1〕〔2〕 《甲骨文编》“东”字条、“中”字条。

〔3〕 萧良琼:“卜辞中‘立中’与商代的圭表测景”,《科技史文集》第10辑。

〔4〕 《大汶口》73页,图五九:8,文物出版社,1974年。

〔5〕 陆思贤:“我国最早的文字——山东大汶口及内蒙翁牛特旗石栅山原始文字例释”,《书法》1988年6期。

〔6〕 《甲骨文编》、《金文编》“干”字条。

〔7〕 《西安半坡》1982年封面图案,文物出版社。

〔8〕 《甲骨文编》“午”字条。

〔9〕 郭沫若:《卜辞通纂》“数字”。

〔10〕〔11〕 《甲骨文编》“甲”字条,“千”字条。

〔12〕 《西安半坡》1982年版图89,文物出版社。

〔13〕 闻一多:《天问疏证》64页,三联书店,1980年。

〔14〕 温少峰、袁庭栋:《殷墟卜辞研究——科学技术篇》,22页,四川省社会科学院出版社,1983年。

〔15〕 “安徽含山凌家滩新石器时代墓地发掘简报”,《文物》1989年4期,图版书。

〔16〕 陈久金、张敬国“含山出土玉片图形试考”,《文物》1989年4期,下引同。

〔17〕 程大位:《算法统宗》。

〔18〕 温少峰、袁庭栋:《殷墟卜辞研究——科学技术篇》,47、52页,四川省社会科学院出版社,1983年。

〔19〕 韩永贤:“对河图洛书的探究”,《内蒙古社会科学》1988年3期。

〔20〕 “1979年斐李岗遗址发掘报告”,《考古学报》1984年1期,23页。

〔21〕 盖山林、陆思贤、萧兵:“连云港将军崖岩画的解释和论争”,《淮阴师专学报》1983年3期。

〔22〕 《宝鸡北首岑》105页图八六,文物出版社,1983年。

〔23〕 《西安半坡》1963年版图版壹肆玖:1;1982年版图116、117。

〔24〕 《西安半坡》1963年版结语。又宋兆麟、黎家芳、杜耀西:《中国原始社会史》468页“图腾崇拜”。

〔25〕 陆思贤:“半坡‘人面鱼纹’为月相图说”,《文艺理论研究》1990年5期。

〔26〕〔27〕 “陕西岐山凤雏村发现周初甲骨文”,《文物》1979年10期。

中国早期的算具

李　迪　　　　　陆思贤

（内蒙古师范大学科学史研究所）（内蒙古文物考古研究所）

本文所论中国早期的算具，是指商周时期结绳与刻木(或竹)以外的计算工具。这个时期的算具问题，到目前为止，还讨论得不多，即使零星有某种程度的涉及，但人们尚无确切的了解。我们根据一些原始资料和后人的零星论述，提出一些粗浅看法。

众所周知，中国早期计算主要是用算筹。“算”(又作“筭”)字在《说文》中解释为“筭，长六寸，计历数者，从竹、从弄，言常弄不误也。”这是汉代的制度，是经过较长时间的发展、演变而成定制的，并不是早期的算筹。查“筭”、“算”二字不见于商代的甲骨文。算筹的起源可能不是一个渠道，最早的算筹，毫无疑问是用代用品，如用某些自然物(草棍木棍等)，当然也没有长短、粗细的要求，无所谓制度问题。到商周时期，由于整个社会和科学技术的进步，人们活动范围的扩大，计算量也要相应的增加。算筹的代用品就由某些自然物转变为经过一定加工的细棒形物。

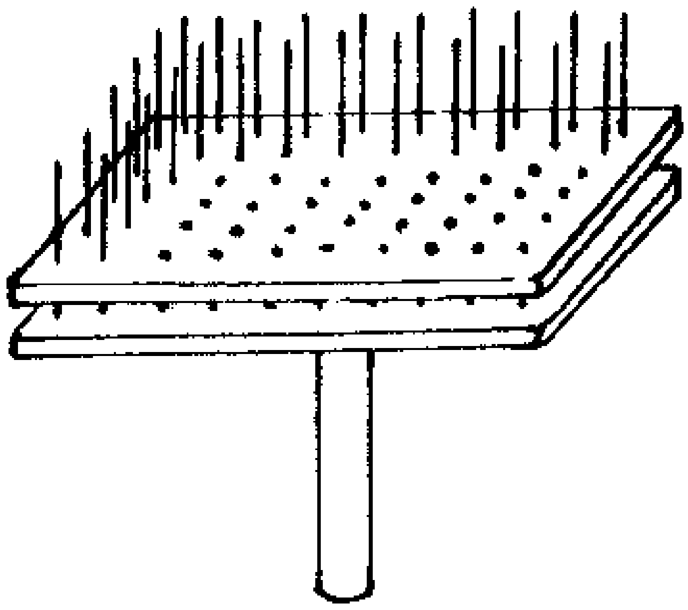
我们认为，算筹很可能是从“册”来的。在甲骨文中有“册”字，作“[illegible]”[1]，后来的“策”、“筴”即有“筹”的意思，顾野王说：“策，筹也”[2]。因此，算筹也称筹策，策应是从册同音通借而来。关于筹、策、筹策等的历史记载，李俨早有考证，实际上都指算筹[3]，我们这里不再重复。“策”字从竹从朿(刺)，可能是用竹子削制成的箭杆，再说军事上箭的消耗很大，数字很高的时候，计算人员就把箭杆当做计算工具，也就是代用的算筹。这是算筹的一种来源。

在金文中有“筭”，作“[illegible]”[4]，“侯马盟书”上也有“筭”字，释作“巫”[5]，分别用在射礼和筮法卦爻上，就是算筹或算草(蓍草)。由此可知，“筭”字的原义是解释向卜的事或数，具有分析、条理或疏散的意思。

甲骨文中也没有“筹”字，但有“畴”字，作“[illegible]”[6]，取义沟洫之间田地的众多，所以俗称田畴。如果说还有耕耘得一条条整齐的苗禾行列或地垅，就好象算筹排列在大地上的话，就更应该称为“畴”，故畴字有数字的含义。李约瑟根据阮元的《畴人传》认为：“畴”字本义是测量人员，后来引申为所有的计算人员(畴人)，尤其是天体测量人员[7]。早在西汉时司马迁就说过：“幽厉之后，周室微，陪臣执政，史不记时，君不告朔，故畴人子弟分散。”[8]《畴人传》一书包括从古代到清代中期的天文学家和数学家的传记著作，“畴人”一词的“畴”字显然有计算的意思，在地理上为畴，在数学上为筹，是表示用竹木棍计算天文和地亩问题。在我们看来，筹与畴的关系极为密切，因为用竹棍等计算田亩等问题，所以就由畴演变为筹，也就是筹字可能是由畴来的。

算筹放在什么上？装在何种器物物里？关于早期的这个问题还没有人予以明确讨论。我们提出一种商代算器的设想，并取名为“算中”。在《甲骨文编》中，收录“[illegible]”字一批[9]，未得释

读，注“史”字从此”。另有“中”字，作“中”、“中”或“中”等等[10]。王国维对史字解释说：“持中为史，持笔为尹”，他还说：“其初当如中形，而于中之上横凿空以立算，达于下横，其中央一直，乃所以持之，且可建之于他器者也。”[11]我们认为王国维的说法是有道理的，史所持之中即为算中，它大概是由两片平行的木板贯穿在一根立轴上。上面那块木板有一个个孔眼，下面那块木板对应上面木板的孔眼有一个个窝坑，算筹插入上板的孔眼而稳于下板的坑内。在算中上，算筹是一根根立着的。立轴是用手持的柄，使用算筹时由史官持柄举着，不用时就把柄插在某个固定放置的器物上。根据这样的推测，当时的算筹不会太长，不会长于汉代的六寸(汉尺六寸大约只相当于现代尺的三寸半多)。但是，计算时是否把算筹全部取下，是在板上进行计算，还是在另外什么地方进行计算，我们尚未考虑好。还有一个问题是，算中及其上的算筹不一定是专用的。如果我们的推测是正确的，那么这种算具也只能用于统治阶级，平民和奴隶是做不到这种程度的。



“算中”推想图

《逸周书》中记载了一则王室在祈祷大会持中运筹的“仆告”仪式[12]：”宰乃承王中，升自客阶作筴执筴从中，宰坐尊中于大正之前。太祝以王命作筴，仆告大宗，王命□□秘作筴，许若。”其中“执筴从中”的“中”就是算中，而“筴”就是筹，前面已有解释。“仆告”用中，大概是奴隶制时代，奴隶主用奴隶经商，每天拿着算中向奴隶主报帐，便是臣仆的责任。

《说文》有“業”字，释作“業，大版也。”清段玉裁注：“凡程功积事言業者如版上之刻，往往可计数也。”由此可推知：“業”可能是一种算具，在其上进行计算，至于什么样子，没有找到任何这方面的资料，估计应是较大的板片，或许是由算中发展而来。

在周代还有一种盛算筹的壶，我们在这里暂称之为“算壶”。在《召伯虎段》[13]中记载了一则使用算筹与算壶的故事：召伯于四年底向王室进献的物品不够数量，第二年初，王室使者来核实没有交够的原由，使者“以壶以告”就是手中拿着一个存放算筹的壶为核实的根据。在这筹上写着：一个叫止公的，按食邑应岁贡于朝廷的物品，多欠着没有交上，这是因为召伯纵容而这样做的。如果说止公放荡无礼是三分，则召伯有二分；止公放荡无礼只是二分，则召伯应负责任一半。使者所持的算筹上写着止公头一年积欠的总帐，这是经过了运算再存入壶中的，筹上写的是计算结果，壶好象现在的帐本。郭沫若认为金文中的“筹”字，一般指算筹，并说：“用刻有数字之竹筹布算，如以除开方等之商数表，皆记其于筹上，使便于入算也。”[14]很显然，壶中存放的是写着数字的筹，又是一种算表，比不写字的筹的功用多。需要指出的是：我们所说的算壶不一定是完全专用的算具，和筹一样，还可做为其他用处。在周代大兴投壶之戏，统治阶级把这种戏做为一种礼仪，投壶用矢，用算筹计数，据记载：“投壶之礼，主人奉矢，司射奉中，使人执壶，“奉中”的“中”全称为”鹿中”，就是一个卧鹿形器，背上有一穴筒，装算筹，又说：“司射进度壶，间以二矢半，反位，设中东西，执八算兴”[15]就是司射拿着八根算筹，等着记分。有的古籍上说：

"释获者执鹿中一人,执算以从之。释获者坐,设中南当福西,当西序东面,兴受算,从实八算于中,横委其余于中。……"[16]在鹿中里一次只能装八根算筹。

根据这些资料可以进一步证实我们对算中的推测,鹿中很可能从算中演变出来的特殊器具,因其装算筹,尽管作成的是鹿形,可是仍称为"中",只不过是在前面加个"鹿"字而已。

根据上面简短的论述,我们可以得到如下的推论:算中和算壶大体朝两个方面发展,一是变成游戏工具,但仍保留着原来的一些痕迹;一是演变成纯数学工具:算板、算袋和算子筒。至于是否有专用的算板,迄无定论,而后两者则是确定无疑的。



鹿中
(采自明《投壶仪节》)

参考文献

〔1〕《甲骨文编》卷二·三十一,1982,中华书局,第87—89页。
〔2〕〔唐〕慧琳:《一切经音义》卷十三,引顾野王《字说》。
〔3〕李俨:"筹算制度考",《中算史论丛》第四集,1955,科学出版社,第1—8页。
〔4〕郭沫若:《两周金文辞大系图录考释。史懋壶》。
〔5〕山西省文物工作委员会:"侯马盟书注释四种",《文物》1975年第5期,第20--26页。
〔6〕《甲骨文编》卷十三·九,1982,中华书局,第522页。
〔7〕〔英〕李约瑟:《中国科学技术史》,中译本第三卷,1978,科学出版社,第8页。
〔8〕《史记》卷二十六"历书"。
〔9〕《甲骨文编》卷三·十九,1982,中华书局,第127页。
〔10〕同上,卷一·九,第17—18页。
〔11〕王国维:《观堂集林·释史》。
〔12〕《逸周书·尝麦解》。
〔13〕郭沫若:《两周金文辞大系图象考释·召伯虎殷》。
〔14〕郭沫若:《两周金文辞大系图录考释·召伯虎殷》。
〔15〕《礼记正义》卷五十八"投壶"。
〔16〕《仪礼》卷五"乡射礼"。

论中国古代的国家天算教育

郭世荣

（内蒙古师范大学科学史研究所）

科学知识的传授与科学家的培养历来与科学教育的内容、方式密切相关。中国古代的天文历法和数学教育有民间的和官方的两种形式。官方教育由奴隶主政权或封建官府主持，由朝廷举办的国家教育是其最高形式。这方面的教育活动持续了几千年，深入探讨它的内容和进行评价是中国天文学史和数学史上的重要课题。

关于中国古代的数学教育制度和数学教育史，李俨和严敦杰两先生各有专门论述[1][2][3]。自周代起，教育家们已注意到数学的重要性，把“数”和“书计”列为教学内容。至迟在北魏时已有了“算学博士”，目前所知，北魏初的殷绍（约生活于公元4世纪末期至5世纪六七十年代）是第一个留下姓名的算学博士。

隋代时数学已被列入国家高等教育之中，开始向制度化方向发展。国子监中设有算学博士二人，算助教二人，招收学生八十人。至唐代数学教育制度已形成，对从事教育的官员、教师以及学制、教材、考试制度和毕业生的使用等都有明确规定。以后的数学教育时断时续，兴衰交替。

中国古代的天文历法教育主要由国家天文机构负责。唐代在天文机构中设有专门的教学人员，招收学生。宋元明清各代的国家天文历法教育也是兴衰不定，时好时差。

为了研究国家天算教育的得失，简要分析一下数学家和天文历法家的情况是十分必要的。中国历代天算家为数众多，须按一定标准选出有代表性的一部分进行研究，本文尝试将著名天算家分成两类。首先是有创造性研究成果者，他们对中国古代天文学或数学的发展做出了重大贡献。如刘徽，在《九章算术注》中有许多独创性工作，把数学研究推向了一个崭新的阶段。又如郭守敬，在天文仪器的制造、天文测量和历法改革等方面诸多建树，成绩卓著。其次是研究成果不一定特别显著，但在历史上有相当影响的人。如北周时的甄鸾，他著有《五经算术》、《五曹算经》等书，并注解过其他算经，在历史上颇有影响，但他的著作内容浅近，有的算法误差较大，他在当时很难算是第一流的数学家。又如唐朝李淳风因注解整理《十部算经》而闻名，但数学创造性成果不多。他的《麟德历》具有较高水平，不过他在天文历法史上的地位却远不及数学史上高。按照这种分类标准，我们将19世纪末以前的天算家选择出部分列如次：

甘　德	石　申	张　苍	耿寿昌	刘　洪	落下闳	张　衡	赵君卿	杨　伟
刘　徽	虞　喜	孙　子	何承天	祖冲之	祖　暅	张邱建	张子信	甄　鸾
刘　焯	王孝通	张　遂	李淳风	边　冈	张思训	刘　益	贾　宪	沈　括
蒋　周	周　琮	秦九韶	杨　辉	李　冶	王　恂	郭守敬	赵友钦	朱世杰
吴　敬	周述学	朱载堉	程大位	徐光启	王锡阐	梅文鼎	明安图	汪　莱

李　锐　项名达　戴　煦　李善兰　华蘅芳

这个名单共列出 50 人，他们是中国历史上最主要的天算家，其中战国 2 人，汉 5 人，三国 3 人，晋 1 人，南北朝 7 人，隋 1 人，唐 5 人，宋 7 人，金元 5 人，明 5 人，清 9 人。这些人的知识来源和接受教育的情况十分复杂，但真正由国家培养出来的大概只有贾宪和明安图二人。贾宪是楚衍的学生，楚衍长期在国家司天台工作，对天算颇有研究，当时有人认为："近世司天算，以楚衍为首。"[4]楚衍培育了朱吉和贾宪。朱吉长于天文历法，担任太史；贾宪则以数学闻名，他们应是官学出身。明安图早年以官学生身份进入钦天监学习，取得良好成绩，后一直在钦天监工作，官至监正[5]，他完全是由国家培养出来的。即使把考察范围扩大一些，《畴人传》中所录西汉至明中叶约 150 人中只有 4 人出自国家教育机构，即唐代的郭献之、宋代的史序和张奎、元代的齐履谦[6]。

一般来说，中国古代天算家的成长道路主要有以下几种：一是通过自学而成为专家，如刘徽、赵爽、祖冲之、一行(张遂)、李冶等人；二是世业相传，如祖冲之一祖暅父子，又如王恂 13 岁起从父亲学习数学；三是亲友相传，如何承天通过其舅的影响和帮助而成为天文学家；四是由民间教育培育出来的，如秦九韶求学于"隐君子"，李锐拜师钱大昕。一个事实是，不少人在已具备了良好的科学素养之后进入国家天文历法机构中工作，进一步提高了自己的学术水平，如李淳风、郭守敬、王恂、周琮等。但是，他们原已是学有专长的天算家，而不是由国家培养出来的人才。

上述分析表明，中国古代的国家天算教育虽然历史悠久，有时甚至颇具规模，如元代司天台有天文生 75 人，太史局有星历生 44 员，但其中著名学者却极少。历代天算学生的总数之大与成才人数之少形成鲜明对照。为什么天算家罕有官学出身的呢？这是值得认真探讨的。

显然，问题出在这种教育本身具有很大弊病，本质上很难培养出特别优秀的人才。产生弊病的原因是多方面的，包括政治、文化、观念、教育政策及教育内容等多种因素。

在古代中国，天文历法具有很特殊的功能，统治者要直接利用它。凡宗教、占卜及各种礼仪活动都与天文学直接相关，颁布历法被视为统治权的象徵，也是受命于天的体现。这种观念根深蒂固，极有影响。因而，历代政权在形式上几乎都表现出对天文历法的关注和重视，并直接控制这方面的研究。但这只是表面现象。尽管有时个别天文学家被授于很高的官职，但实际上，不少史料表明统治者对阴阳术数和堪舆占卜更重视。天文学家的主要责职是观天象，察时变，天文历法知识本身并没有被放在应有的地位上。精通天文历法的学者的社会地位一般不仅不能和哲学、宗教、文学、历史等方面的学者相比，而且也未必有农业、水利、医学等方面的学者受重视。至于数学家的地位就更低了。隋唐以来，国家科举中有时设有明算、三式、天文等科，但其重要性不能和其他科目相比。

由于在选择官吏时很少考虑数学水平，以致于文官不会算术的事例屡见不解。在以官为中心的中国古代社会，钻研与功名无关的天算者自然就很少了。因而天算人才有时候很缺乏，不能满足官府的需求，朝廷下令征召精通天算人员的现象也不罕见。例如，北宋初令"天下伎术有能明天之者，试隶司天台，匿不以闻者，罪论死"[7]。

统治者实质上轻视天算，反映在教育上主要有以下几点。首先，教育制度没有常规、兴废不定。唐宋时算学教育的兴废叠见史籍[8]，变动较为频繁。其次，从事天算教育者的待遇低，天算学生来源于平民，且招生数量少。主持算学教育的算学博士的品级为从九品下，是最低的一等，

算助教则不列入品级。唐代规定“律学、书学、算学，掌教八品以下，及庶人子为俊士生者”[9]，学生的出身在国家教育机构中是最低的。至于招生名额，最少时仅二人，少于律、书二科，居末位。学生毕业后当然也不会有好的待遇。第三，国家天算教育，要求不高，仅以培养一般的工作人员为主，不以训练优秀的天算家为目标。

天算教育中最严重的问题是缺乏合适的教科书。唐初李淳风等人奉敕整理、注释《十部算经》作为国子监的数学教材，并被宋代沿用。这当然有好的一面，让学生直接学习当时一流的数学著作。但是这些书适合作教材的太少。元明时也没有合适的教材。天文学用作教材的主要是前代历法著作、《周易》、筮法及占卜术数方面的有关专书。总之，没有组织人力编写由浅入深而有层次的教材，是不足之处。

传统观念对数学、天文学的轻视也是影响国家天算教育水平的一个因素。中国古代重儒轻技，数学被视为“六艺之末”，数学研究被称作“雕虫小技”，得不到应有的重视。有不少人明知数学是十分有用的，但是敬而远之，不愿下功夫学习。《颜氏家训》如此告诫子孙：“算术亦是六艺要事，自古儒士论天道，定律历者，皆学通之。然可以兼明，不可以专业。”这可以说是几千年来人们看待数学的代表。数学“可以兼明，不可以专业”的观点长期流行。甚至个别数学家也没有跳出这种窠臼，认为数学是无足轻重的，如清代陈世明曾在《数学举要》中写道：“尝观古者教人之法，必原本于六艺。窃疑数之为道小矣，恶可与礼乐侔。”随着商业的发展，数学与商业的结合，在轻商思想的影响下，数学更加被士大夫们所鄙视，如陈世明所说：“后世数则委之商贾贩鬻者，学士大夫耻言之，皆以为不足学，故传者益鲜。”[10]

封建朝廷多迷信占卜术数，是影响天算教育的又一因素。占卜术数堪舆等都和天文历法及数学有关，为了附会自己的说法，迷信家们往往在自己的论述中掺入一些天算知识。而个别天算家也在自己的理论中掺杂一些迷信内容。这样，天算常常带有一层神秘的面纱。此外皇家对天文家有一种顾忌，认为他们可能揭穿天文现象与天人感应说法的秘密，可以不费力地“察”出时变来，危及江山社稷。所以，历史上经常有禁私习天文的诏令颁布，统治集团以警惕的眼光监视着懂天文历法的人。例如，宋初对天文术士的控制就很严，国家实行统一考试，合格者录用，不合格者“黥配海岛”[11]。而元朝则禁止懂天文的人与高级官员接触。特别是个别把持国家天文历法机构的官员们又经常对不同意见进行打击、压制，甚至伪造天象，等等。历法改革的斗争一直是很尖锐的，有人付出了沉重的代价。这种现象在明代最突出，当时有不少天文历法人才，不但得不到重用，还受到迫害。[12]这些现象对天算教育产生了很大消极影响。

与国家天算教育相比，我国古代的民间天算教育要发达得多。但两者相互脱节，这也是前者的缺陷之一。中国历史上出现过不少优秀的民间天算教育家，培养出一些杰出人才。例如，南宋杨辉在数学教育上颇有成就。他非常重视教学，形成了一套完整的教育思想，制定了教学计划，有严格的“习算纲目”，并编写了教材。金元之际的著名数学家李冶，也是一位著名的教育家，他在晚年以教学为主，招收学生，传播数学知识。他在完成了《测圆海镜》之后，又编写了《益古演段》，作为教材，对于天元术的普及做出了贡献。元代的朱世杰以数学名家周游各地二十多年，后来在扬州时，“踵门而学者云集”。他既是数学家，又是教育学，既撰写了《四元玉鉴》这样的杰作，又完成了学算入门著作《算学启蒙》。可惜的是，他们几乎都是单枪匹马，或者周游讲学，或者隐居山泽，很少得到官府重视。李冶虽曾几次受到忽必烈的注意，但只是召他做官，而不是为他创造良好的教学环境，让他培养人才。中国古代的国家天算教育始终是封闭的，没有

和民间教育联系起来。如果让杨辉那样的教育家主持国家教育，可能会有明显的成就。

那么，是不是古代国家天算教育毫无成就呢？当然不是。它虽然没有培养出我们所期望的那样多的杰出人才，但是造就了大量的一般天算人员，为国家的天文历法机构提供了一代又一代的工作人员，对于天算的普及有积极意义。另外，在元明清各代，国家培养了一些少数民族天算人才，无疑对提高边疆地区和少数民族的天算水平做出了贡献。从数学教育的角度看，唐代整理注释《十部算经》，宋代刊印，都是国家教育的结果，这对于数学典籍的扩散和流传，对于保存古代文献，无疑具有重大的意义。

参考文献

〔1〕〔8〕 李　俨："唐宋元明数学教育制度"，《中算史论丛》第四集，1955，科学出版社。

〔2〕 李　俨："清代数学教育制度"，同上。

〔3〕 严敦杰："中国数学教育简史"，《数学通报》1965年8、9期。

〔4〕 〔宋〕王　洙：《王氏谈录》。

〔5〕 李　迪：《蒙古族科学家明安图》，内蒙古人民出版社，1978。

〔6〕 李　瑶："自成体系的天文历算知识的传授——中国古代科技教育初探之二"，《广西民族学院学报》(社科版)，1979年第2期，第87—96页。

〔7〕 〔元〕脱脱等，《宋史》卷48"天文志"。

〔9〕 (唐)吴竞：《贞观政要》卷第七。

〔10〕 (明)陈世明：《数学举要》序。

〔11〕 同〔7〕卷4"本纪第四"。

〔12〕 李迪："明代天文历法史中的若干问题"，第四届中国科学史国际会议论文，1986，澳大利亚悉尼。

《九章算术》正负术再研究*

胡炳生
（安徽师范大学数学系）

《九章算术》"正负术"载于卷八方程章第三问之后："正负术曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。"

此文含义目前有两种不同的理解。一种认为正负术是出现负数的方程术[1]。另一种认为它是正负数加减法运算法则，前四句讲减法，后四句讲加法[1]~[4]。后者的具体解释大同小异。如用现在数学符号可将正负术表示成[5]：

设二正数 $a>b>0$。关于前四句有：

$\pm a-(\pm b)=\pm(a-b)$ （同名相除）　　$\pm a-(\mp b)=\pm(a+b)$ （异名相益）

关于后四句有：

$\pm a+(\pm b)=\pm(a+b)$ （同名相益）　　$\pm a+(\mp b)=\pm(a-b)$ （异名相除）

对术文中其余四句的解释，各书略有不同。有的将"无入"解释为"不够减"或"不相对消"[2][3]，因此可用符号将它表述为：

设二正数 $a>b\geqslant 0$，关于第三、四句有：

$b-a=-(a-b)$ （正无入负之）　　$-b-(-a)=(a-b)$ （负无入正之）

关于第七、八句，有：

$a+(-b)=(a-b)$ （正无入正之）　　$-a+(b)=-(a-b)$ （负无入负之）

有的著作则将"无入"解释为"空位"或"零"[4][5]，设正数 $a>0$，可用符号表示为：

关于第三、四句有 $0-(\pm a)=\mp a$ （正无入负之，负无入正之）

关于第七、八句有 $0+(\pm a)=\pm a$ （正无入正之，负无入负之）

本文的目的在于提出新的论据支持文[1]的基本论点，同时对"方程术"、"正负术"中"遍乘"、"直除"、"无入"等关键词给出新的解释。

（一）正负术是方程组变换的方法

将线性方程组系数矩阵变换成三角形阵时，在正数范围内，当用"遍乘直除"法不能实现这种变换时，需要新的方法，这就是正负术。

遍乘直除的目的在于消去某些行的（非零）头位。设要消去的是 A 行头位，参照行是 B 行，$(a_0>0,\ b_0>0;\ a_1\cdot b_0>b_1\cdot a_0,\ a_2\cdot b_0>b_2\cdot a_0)$ 消去 a_0 的步骤是：

---

* 本文是 1990.3. 中国科学技术史学会第四次代表大会论文。

(A)	(B)		(A)	(B)		(A)	(B)
a_0	b_0		$a_0\cdot b_0$	b_0		$a_0\cdot b_0-b_0\cdot a_0$	b_0
a_1	b_1	$\xrightarrow{\text{遍乘}}$	$a_1\cdot b_0$	b_1	$\xrightarrow{\text{直除}}$	$a_1\cdot b_0-b_1\cdot a_0$	b_1
a_2	b_2		$a_2\cdot b_0$	b_2		$a_2\cdot b_0-b_2\cdot a_0$	b_2
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮

但是，当下列“非常”情况之一发生时，上述遍乘直除法在正数范围内便不能进行到底：

Ⅰ、a_0 与 b_0 同号，a_1 与 b_1 异号或 a_2 与 b_2 异号，等等。

Ⅱ、a_0 与 b_0 同号，a_1 与 b_1(或 a_2 与 b_2，等)也同号，但 $|a_1b_0|<|b_1a_0|$(或 $|a_2b_0|<|b_2a_0|$，等)。

Ⅲ、a_0 与 b_0 异号，a_1 与 b_1(或 a_2 与 b_2，等)同号。

Ⅳ、a_0 与 b_0 异号，a_1 与 b_1(或 a_2 与 b_2，等)也异号，但 $|a_1b_0|<|b_1a_0|$(或 $|a_2b_0|<|b_2a_0|$，等)。

正负术，就是针对这些非常情况提出的变换方程的方法，其目的仍是为了消去一行的头位。具体地说，术文的前四句用于 a_0 与 b_0 同号的情况Ⅰ、Ⅱ；后四句用于 a_0 与 b_0 异号的情况Ⅲ、Ⅳ。

关于这一点，刘徽在“同名相除”下注中已说得很清楚：“头位同名者当用此条；头位异名者当用下条。”

(二)关于“遍乘”、“直除”和“无入”的意义

遍乘直除是解方程的基本方法，应该将它的意义作广义理解，才能使它普遍应用。《九章算术》和刘徽注也正是这样做的。

1. 关于遍乘　在上述非常情况下，用 b_0 去乘 a_0，a_1，a_2，…时，会出现不同色的筹(正、负数)相乘。如何解决这个问题？原书实际上是用负数绝对值来相乘的。例如，当 $b_0=-3$(黑筹)，便用 $|b_0|=3$(即黑筹的根数)去遍乘 $a_i(i=0,1,2,\cdots)$，这样，不论 a_i 是正数(赤筹)还是负数，它的 $|b_0|$ 倍数 $|b_0|a_i$ 与 a_i 同号，即乘后筹色不改。

如果不这么理解，那就要出现黑筹乘赤筹得到黑筹的现象，这是不可想象的，原书和刘徽注也没有任何暗示。

2. 关于直除　直除，一般解释为连减。但其实不然。当二数 a、b 同为正数时，从 a 直除 b，是指从 a 连减 b，直至不能再减(否则出现负数)时为止。此时余数 r：$0\leqslant r<b$。

当 a、b 同为负数(黑筹)，$|a|$、$|b|$ 可视为表示黑筹的数量。这时从 a 直除 b，就是接连从 a 的黑筹中，递次去掉相当于 $|b|$ 的黑筹直到余数 r 满足 $0\leqslant|r|<|b|$。

只有对遍乘直除作如上理解，才能在任何情况下，用方程术和正负术来变换方程组，达到消去一行头位的目的。

3. 对“无入”的理解　刘徽注称：“无入，为无对也”。“对”者，对应之意。无 就是没有与之对应的(部分)。这是很准确的解释。

设有二数 a、b(不妨假定 $a\geq0$，$b>0$)，从 a 除去(减)b，可能发生两种情况：

(1)　$a\geq b$。这时可视为 b 在 a 中全部有对应者，那么从 a 除去 b 即可。

(2)　$a<b$。这时 b 在 a 中只有一部分对应者，而 $(b-a)$ 在 a 中没有对应者。亦即 $(b-a)$ 成了“无对”部分。此即“无入”之意。这“无入”之数，可正、可负，也可以是零。

(三)正负术术文的具体意义

“同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。”

1. 第一句“同名相除”是领句，说明此条在两行头位同号时应用。以下三句则是说对在下行中出现不同情况时的不同处理方法。

2. 当出现情况Ⅰ时，用第二句。例如 a_1 与 b_1 异号，当然 $a_1|b_0|$ 与 b_1 也异号，这时(A)行 $a_1|b_0|$ 上每次加上 $|b_1|$ 同色筹，共进行 $|a_0|$ 次，直除完毕。

3. 当出现情况Ⅱ时，又分两种：

(1)直除到某次时，下位中出现不够除而“无对”部分为正时，用第三句；

(2)下位中出现不够除的“无对”部分为负时，用第四句。

“其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。”

1. 第一句是领句，说明此条在两行头位异名时应用。以下三句则表明在下行出现不同情况时的不同处理方法。

2. 当出现情况Ⅲ时，则用第一句。例如 a_1 与 b_1 同号，那么就将 b_1 加到 $a_1|b_0|$ 上去，直至头位消去为止。

3. 当出现情况Ⅳ时，又分两种：

(1) a_1 与 b_1 异号，某次相除时下位不够减，而“无对”部分为正时，则用第三句“正无入正之”。

(2) a_1 与 b_1 异号，某次相除时下位不够减，而“无对”部分为负时，则用第四句“负无入负之”。

(四)正负术包含正负数加减法则，但不是专指正负数加减法则

当两行头位同名，相消时，须用减法，故正负术前四句包含有正负数减法法则；当两行头位异名，相消时，须用加法，故后四句包含有正负数加法法则。具体地说，有以下几项：

1. 前条中“同名相除，异名相益”包含有法则

若 $a>0$，$b>0$，则 $-a-(-b)=-(a-b)$，$a-(-b)=a+b$

2. 前条中“正无入负之，负无入正之”包含法则

若 $a>b>0$，则 $a-b=-(b-a)$，$-a-(-b)=(b-a)$

3. 后条第一、二句指出

若 a 与 b 异号，且 $|a|=|b|$，则 $a+b=0$(如是才能在头两异号时消去一行头位)。

4. 后第三、四句指出

若 $a>b>0$，则 $a+(-b)=a-b$，$b+(-a)=-(a-b)$。

但是，正负术并不是讲正负数加减法法则的专用术语。除文[1]所举理由外，再补充几点。

第一、如果正负术即指正负数加减法法则，且前条讲减法法则，后条讲加法法则，这违反先加后减的常例顺序。

第二、异名相除一句，明明是说两个不同号的数相减，而偏说这是指两个异名数相加法则，显得过份牵强，似不能成立。

第三、如果正负术仅是正负数加减法则，在没有说明正负数乘法法则的情况下(书中确实如此)，单用它是不能完成情况Ⅰ—Ⅳ下的方程组变换的。而这与《九章算术》提出正负术的本意不合。

最后顺便指出，把“无入”解释为“空位”或“零”，是不能令人满意的。因为这样一来，当非常情况Ⅰ和Ⅲ出现时，就不知该如何处置了。

参 考 文 献

〔1〕 梅荣照:"刘徽的方程理论",《科学史集刊》第11期,地质出版社,1984。
〔2〕 钱宝琮:《中国数学史》,科学出版社,1981年重版。
〔3〕 白尚恕:《九章算术注释》,科学出版社,1983年第1版。
〔4〕 李迪:《中国数学史简编》,辽宁人民出版社,1984年第1版。
〔5〕 沈康身:《中算导论》,上海教育出版社,1986年第1版。
〔6〕 郭书春:"《九章算术》方程章刘徽注新探",《自然科学史研究》1985年第1期。
〔7〕 李继闵:"《九章算术》与刘徽注中的'方程理论'",《九章算术与刘徽》,北京师范大学出版社,1982年第1版。

《九章算术》商功章逻辑顺序及造术初探
——兼论《九章》对运算律 ab+ac=a(b+c)的认识

王荣彬
(内蒙古师范大学科学史研究所)

《九章算术》是一本问题集式的数学书,不象《几何原本》那样具有严密的逻辑,这是众所周知的。但就某些章节来说,则不完全如此。笔者新读《九章》商功章,认为作者对体积公式的顺序安排具有一定逻辑性,反映出作者对这些公式本身的逻辑性有了较明确的认识。

又在方田章中有求弧田面积的公式,对该公式造术的研究,最早由苏联女学者З. И. Березкина提出系用等腰梯形面积近似弧田面积[1]。但有人对此提出疑议,因为这种方法所得到的面积公式应为:弧田面积$=\frac{1}{2}$(弦+矢)矢,与《九章》中所载公式:"以弦乘矢,矢又自乘,并之,二而一"。[2]即:弧田面积$=\frac{1}{2}$(弦×矢+矢×矢)形式不同,作者当时是否能方便地把这两式互相变形,有人认为这个问题值得探讨[3]。商功章集中了《九章》大部分体积计算问题,本文试图对其中一些体积公式造术进一步分析,给这个问题以肯定的回答。

一

商功章涉及柱体、台体、锥体以及一些比较复杂的拟柱体等的体积计算,所给公式都正确无误,具有较高水平。《九章》作者对这些公式先后顺序的安排由易到难,具有逻辑性。今将商功章题术内容列表如下:

题　号	题 术 内 容
一	"穿地、壤、坚"三种土的换算
二至七	"城、垣、堤、沟、堑、渠"术: V=(上广+下广)·深/2
八	方堡壔:V=方^2·高
九	圆堡壔:V=(周^2·高)/12
十	方亭: V=(上方^2+上方·下方+下方^2)·高/3
十一	圆亭: V=(上周^2+上周·下周+下周^2)·高/3
十二	方锥:V=(下方^2·高)/3
十三	圆锥:V=(下周^2·高)/36

十四	堑堵：V＝(广·袤·高)/2
十五	阳马：V＝(广·袤·高)/3
十六	鳖臑：V＝(广·袤·高)/6
十七	羡除：V＝(上广＋下广＋末广)·深·袤/6
十八	刍甍：V＝(2·下袤＋上袤)·广·高/6
十九至	"刍童、曲池、盘池、冥谷"术：
二十二	V＝〔(2上袤＋下袤)·上广＋(2下袤＋上袤)·下广〕/6
二十三至二十五	圆锥、半圆锥、四分之一圆锥。
二十六	反求垣积的下方
二十七	反求正四棱柱的高
二十八	反求圆柱的周

经考查易知作者排列的线索是：柱体——锥体——台体——拟柱体——复杂的台体（如曲池等），并运用"截割原理"（即通常所谓的"卡瓦列里原理"）由方形立体推导出相应的圆形立体的体积公式。

商功章第一题讲三种土壤的体积换算，与后面问题有关。第二至九题均柱体的体积计算，其中方堡壔和圆堡壔即为长方体和圆柱体，城、垣、提、沟、堑、渠皆为底面是梯形的正四棱柱。把圆柱体放在棱柱后面很有道理。又为表达由方到圆的思想，把方堡壔放在圆堡前面，体现了作者对"截割原理"的认知。原文在此以下的方亭与圆亭，方锥与圆锥也都成对相连。第十、十一题的方亭与圆亭（正四棱台与圆台）插入锥体之前，可能是为了把方锥、圆锥以及特殊锥体"阳马"、"鳖臑"并列之故，本文的造术分析亦表明《九章》的台体不是由锥体截得。

编《九章》的年代，先人们应该是先掌握了立方与长方体积的算法，通过大量反复的分割实践而认识到锥体与台体的算法。本世纪初数学家德恩（M·Dehn）已经证明了：如果用逻辑证明的方法来推导锥体公式，任一证明方案都必须使用无穷小工具。古人就可能是通过简单分割的方法来认识它们的。在十五题阳马术之前，作者插入堑堵术，沿对角面分割长方体得到堑堵，又分割堑堵为阳马与鳖臑，从而达到认识一般锥体。刘徽指出："鳖臑之物，不同器用，阳马之型，或随修短广狭。然不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类。"就这种认识的规律性来看，商功章各题的排列顺序是合理的。可能有人认为若把第十、十一题放在第十六题后面更合理、更严密。其实，选用不同的公理体系，就可以有不同的排列方法，但我们不能以今天的认识去要求古人。

所谓截割原理是指：同高的两立体，在等高处各作一与底面平行的截面，若截面面积之比为一常数，则二立体的体积之比也等于这个常数。祖暅把这原理表述为："缘幂势既同，则积不容异"，言简意赅。刘徽对这个原理也有自己的认识，但没有用具体文字表述出来，因而有人提议称该原理为"刘祖原理"。实际上《九章》作者对此也有一定认识，尽管没有上升到理论高度并形诸笔墨，这也许与《九章》的体例有关。前已有为把相应的方、圆立体并列而调整个别题序之例，另有一处题术的安排更能说明问题。第十八题刍甍术后接着给出了第十九至二十二题的总术："刍童、曲池、盘池、冥谷，皆同术，"即体积公式相同。其中刍童是上、下底面为矩形的台体，而曲池是上、下底为扇形的台体，区别仅上、下底面的面积算法不同。曲池的体积公式无法通过分割来造术，最可能的途径是由刍童公式，结合截割原理而得。

综上,《九章》作者依难易安排商功章题序,即由柱体推出锥体,把台体等分割成柱体与锥体,且方、圆相连,显示出较强的逻辑性。

二

在早期数学中,析因子运算律 $ab+ac=a(b+c)$ 是重要的。本文认为《九章》作者在推求商功章的台体、拟柱体等体积公式时,已经使用了这一代数运算律,理由如下。

《九章》中虽然没有直接使用该运算律,但从下述造术分析中可以肯定他是回避不了的。

1. 方亭。方亭即正四棱台。方亭术曰:"上下方相乘,又各自乘,并之,以高乘之,三而一。"若设上底为 a,下底为 b,高为 h,术文即

$$V=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h \qquad (1)$$

此式获得可能如下。

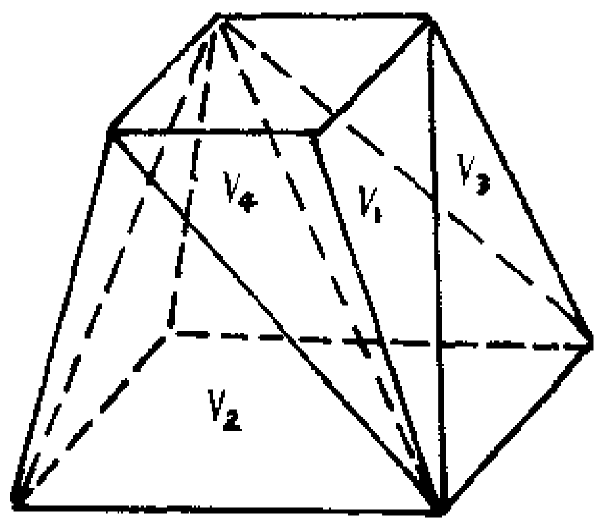


图 1

如图 1 所示,方亭可分割为两四棱锥(V_1,V_2)及两鳖臑(V_3,V_4)。则 $V=\frac{1}{3}a^2h$,$V_2=\frac{1}{3}b^2h$,两鳖臑的体积相等,其广、袤、高分别为 a、b、h,从而 $V_3=V_4=\frac{1}{6}abh$。所以有

$$V=\frac{1}{3}a^2h+\frac{1}{3}abh+\frac{1}{3}b^2h \qquad (2)$$

但《九章》的公式如(1)之形!前已述及,《九章》作者求台体体积公式只能用分割法,不论他是如何分割的,必然要遇到提取公因子的运算。下面几例中也有同样的结论。

2. 羡除。羡除乃三面为等腰梯形,两面为勾股形的五面体。羡除术曰:"并三广,以深乘之,又以袤乘之,六而一"。若设上、下、末广分别为 a、b、c,深为 h,袤为 d,则羡除体积公式为

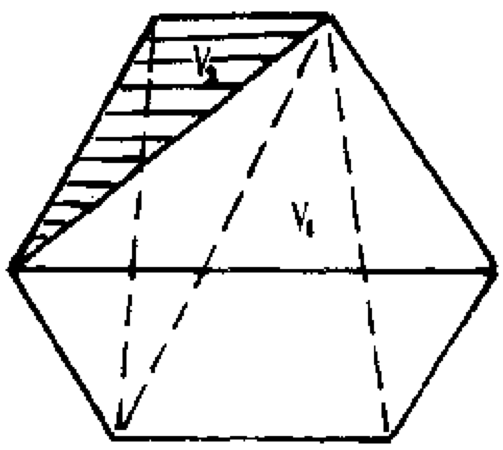


图 2

$$V=\frac{1}{6}(a+b+c)dh \qquad (3)$$

(3)式是正确的。刘徽曾把羡除术分为十二种情形进行归纳证明,方法巧妙,逻辑缜密,刘洁民先生有专文讨论[4]。

羡除术造术可参见图 2 所示,把羡除分成一四棱锥(V_1)与一三棱锥(V_2)。因羡除的上底面与横截面垂直,故四棱锥的高已知,据商功章开头对底面为梯形的柱体的处理办法,作者可得

$$V_1=\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(a+b)\cdot d]\cdot h=\frac{1}{6}(a+b)dh$$

三棱锥的底面为$\frac{1}{2}c\cdot d$，高即羡除的深，所以$V_2=\frac{1}{6}cdh$。从而

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{6}(a+b)dh+\frac{1}{6}cdh \tag{4}$$

由(4)到(3)必须提取公因子dh/6。

3. 刍甍。刍甍是一种上底为一线段，下底为矩形的拟柱体。刍甍术曰："倍下袤，上袤从之，以广乘之，又以高乘之，六而一。"设上袤为a、下袤为b，下广为c，高为h，则刍甍术即

$$V=\frac{1}{6}(2b+a)ch \tag{5}$$

(5)式可有两种途径分割求得。

①分成一个四棱锥(V_1)及一鳖臑(V_2)，如图3所示。则四棱锥的体积为$V_1=\frac{1}{3}bch$，鳖臑的广、袤、高分别是a、c、h. 故$V_2=\frac{1}{6}ach$。有

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}bch+\frac{1}{6}ach \tag{6}$$

由(6)式到(5)式应提取公因子$\frac{ch}{6}$。

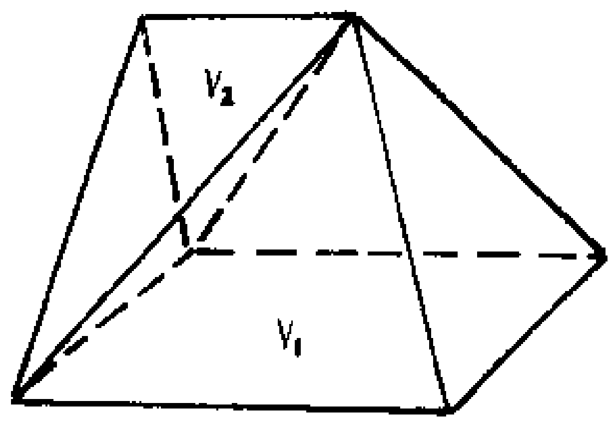


图3

②过上袤两端向底面作垂面，截得两锥体与一柱体(图4)。其两锥体又可合并得一正四棱锥，中间的柱体可看作是两堑堵的合体，这种分法即刘徽又术："亦可令上下袤差乘广，以高乘之，三而一，即四阳马也。下广乘上袤而半之，高乘之，即二堑堵，并之，以为甍积也。"就是说图中的$V_2+V_3=\frac{1}{3}(b-c)ch$。又$V_1=a\cdot\frac{1}{2}c\cdot h=\frac{1}{2}ach$，从而

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{1}{3}(b-a)ch+\frac{1}{2}ach \tag{7}$$

要把(7)式变形为(5)式，必须先用分配律，再提取公因子ch。

4. 刍童。刍童为上下底面都是长方形的四棱台。刍童术公式是

$$V=\frac{1}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]h \tag{8}$$

其中a、c分别为上下广，b、d为上下袤，高为h。此式可如图5分法而得。过上底的两边与下底的中位线各作截面，把刍童分割成三个刍甍，其中V_2与V_3相等，由刍甍术得

$$V_1=\frac{1}{6}(ab+c)ah,\quad V_2+V_3=2\cdot\frac{1}{6}(2d+b)\cdot\frac{1}{2}c\cdot h=\frac{1}{6}(2d+b)ch$$

故

$$\begin{aligned}V&=V_1+V_2+V_3\\&=\frac{1}{6}(2b+c)\cdot ah+\frac{1}{6}(2d+b)\cdot ch\end{aligned} \tag{9}$$

提取公因子$\frac{h}{6}$，(9)式即为(8)式。

综合上面四例,《九章》作者把$\frac{1}{2}(a+b)b$与$\frac{1}{2}(ab+b^2)$两式互相变形是不成问题的。刘徽使用这个运算律的痕迹更明显。如在方亭术注中他指出:"上下方相乘为三尺,以高乘之,得积三尺,……下方自乘为九,以高乘之,得积九尺,……上方自乘,以高乘之,得积一尺,……故三而一,得积尺。"他用堑堵、阳马和立方体来验证《九章》的方亭体积公式$V=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h$($a$、$b$为方亭上下底边,$h$为高),把上式拆为:上下方相乘以高乘之,下方自乘以高乘之及上方自乘以高乘之。即有

$$V=\frac{1}{3}(a^2h+abh+b^2h)=\frac{1}{3}(a^2+ab+b)h$$

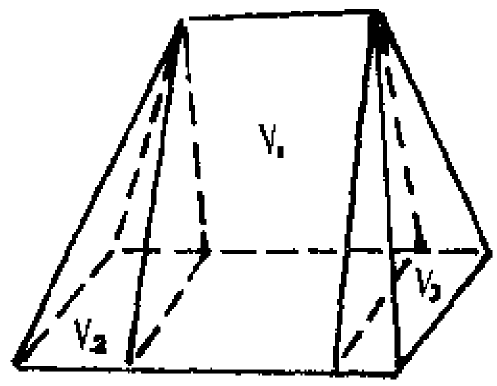


图 4

同注又说:"为术又可令方差自乘,以高乘之,三而一,即四阳马也。上下方相乘,以高乘之,即中央立方,四面堑堵也。并之,以为方亭积数也"。能给出方亭的另一等价体积公式:$V=\frac{1}{3}(b-a)^2h+abh$说明对分配律及析因子运算律必有所认识,但以上运算律的讨论并不等于笔者就赞同Э. И. Березкина的观点,相反,笔者认为如果《九章》作者果真用等腰梯形近似弧田的话,那么他得到公式$S=\frac{1}{2}(a+b)b$,反而不会把它化成$S=\frac{1}{2}(ab+b^2)$的。

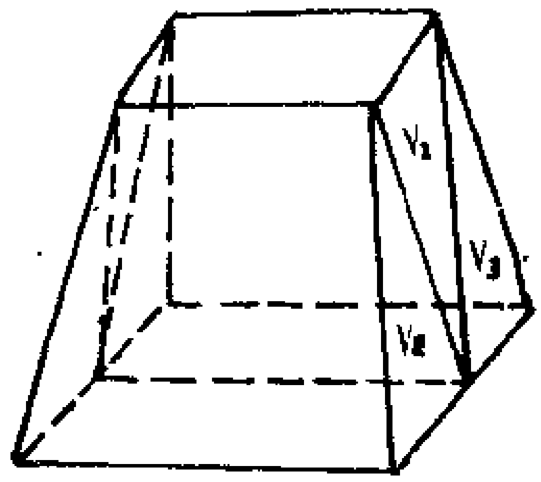


图 5

由于中国传统数学具有寓理于算,表述简洁等特点,给后学者带来很多理解上的不便,读者必须去揣测。这也许是中算史上某些内容深奥的算书之所以失传的重要原因之一(如《缀术》及宋元时期的许多算书)。具体到《九章》对本文讨论的运算律之认识,结论是:作者肯定会做这种运算,但是否把它视为运算律,并认识到它的意义,恐怕就难说了。

参考文献

〔1〕 李迪、沈康身:"《九章算术》在国外",《<九章算术>与刘徽》,1982,北京师范大学出版社,第120—136页。

〔2〕 白尚恕:《〈九章算术〉注释》,1983,科学出版社,56。文中未加说明的引文皆引自此书。

〔3〕 中外数学简史编写组:《中国数简史》,1986,山东教育出版社,第101页。

〔4〕 刘洁民:"浅论刘徽对羡除公式的证明",《中国数学史论文集》(一),1985,山东教育出版社,第121—131页。

关于刘徽用“綦”的问题

郭世荣
（内蒙古师范大学科学史研究所）

刘徽在《九章算术注》中研究立体几何时经常使用“綦”来分析、说明、验证有关的公式和定理，并在证明和推理中广泛借助它来解决问题。“綦”成了一个有力的工具。“綦验法”则是他的一个重要数学手段。现代有关刘徽体积理论的文献几乎都涉及到“綦”，但是仍有一些问题遗留至今。例如，它的适用范围究竟有多大？在具体用“綦”时会遇到什么困难？特别是：“綦”是什么？进一步的讨论对于深入了解刘徽的几何理论是不无裨益的。本文打算在前人研究的基础上作一新的探讨。

一

《九章算术注》中主要有四类綦，即立方綦、堑堵綦、阳马綦和鳖臑綦。利用綦来研究立体几何不是刘徽首创，“方亭术”注称：“此章有堑堵、阳马，皆合而成立方。盖说算者乃立綦三品，以效高深之积。”这里刘徽清楚地指出他以前的“说算者”已经使用“三品綦”（即立方、堑堵、阳马三　）来解决立体几何问题。但是他的注文首先记录并发展了使用綦的方法。

刘徽在注文中用綦研究了球体及方亭、方锥、堑堵、阳马、鳖臑、羡除、刍童、刍甍等立体的体积。“开立方术”注说：“言不尽意，解此要当以綦，乃得明耳。”綦也用于开立方。“綦验法”是刘徽用綦的两个重点之一，顾名思义，这是利用綦来验证公式的方法。当语言表述不方便时，就“验之以綦”，待“其形露矣”，便达到了目的。刘徽把一个立体分解为几部分，每部分用一个綦表示，然后用这些綦的若干倍拼合成一个或几个长方体，从而揭示体积公式。例如，把一个方亭分解为一个立方、四个阳马和四个堑堵，然后用二十七个綦即三立方、十二阳马、十二堑堵拼成三个长方体，验证了方亭公式；又用十二个阳马验证了方锥公式；用七十二个綦验证了刍童公式；用三十六个綦验证了刍甍公式，等等。

顺便指出，有人认为刘徽在“綦验法”中只使用“三品綦”，而不用鳖臑綦。其实，在羡除术注中就用到了它：“假令用此綦，上广三尺，深一尺，下广一尺，末广一尺，无深。袤一尺。下广、末广皆堑堵之广。上广者，两鳖臑与一堑堵相连之广也。（并三广）以深、袤乘，得积五尺，鳖臑居二、堑堵居三，其于本綦皆一而为六。故六而一。”于是，他用堑堵和十二鳖臑两种綦验明了羡除公式。这里的鳖臑虽不是标准的（称为中锥鳖臑），但刘徽证明了它与标准的体积相同。

在刘徽手中，綦不仅用来验证公式，而且也用于帮助推理论证。为了证明“邪解堑堵，其一为阳马，其一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也”，他先用綦对特殊情形予以证明，然后又用“情推”到一般，这是人们早已熟知的。他还用綦证明了“方锥与阳马同实”，“中锥鳖臑”、

"外锥鳖臑"与鳖臑体积相等。在"开立圆术"注中,刘徽设计了"牟合方盖",进而证明了《九章算术》中的球体积公式存在较大误差。"牟合方盖"由"皆似阳马"的八棊组成:"取立方棊八枚,皆令立方一寸,积之为立方二寸。规之为圆,径二寸,高二寸。又复横规之,则其形有似牟合方盖。八棊皆似阳马,圆然也。"这是他设计的唯一的曲面形棊。

二

刘徽构思的棊有标准和非标准之分。他说:"邪解立方,得两堑堵,虽复椭方,亦为堑堵。故二而一。此则合所规棊推其物体,盖为堑上叠也。其形如城,与所规棊形异而同实。"此处的"所规棊"即标准棊。他以一立方尺的立方体作为标准棊,称为立方棊。邪解立方棊得两堑堵棊,又邪解堑堵得一阳马棊和一鳖臑棊。这样得到的棊都是标准的,与它们相似的棊也是标准的,例如构造"牟合方盖"的所用的立方棊,尽管体积才一立方寸,但也是标准的。刘注中还用到了其他种类的堑堵、阳马和鳖臑,这些立体不能通过上述方法分解立方体而得到,从数学上看它们与标准棊不相似,这就是非标准棊。在"棊验法"中,标准棊与非标准棊两者并用,不可或缺。

刘徽重视这两种棊之间的关系,既强调了二者间的差异,又证明了同名的标准棊与非标准棊的体积公式相同。在"羡除术"注中,他说:"合四阳马以为方锥。邪画方锥之底,亦令为中方。就中方削而上合,全为方锥之半。于是阳马之棊悉中解矣。中锥离而为四鳖臑焉。故外锥亦为四鳖臑。虽背正异形,与常所谓鳖臑参不相似,实则同也。"分割方锥得到的中锥、外锥鳖臑虽与标准的"参不相似",但"实则同也"。在"阳马术"注中,又说:"悉割阳马,凡为六鳖臑,观其割分,则体势互通,盖易了也。其棊或修短,或广狭,立方不等者,亦割分以为六鳖臑。其形不悉相似,然见数同积实均也。"由三度不等的长方形分割而来的六个鳖臑是非标准棊,有修短广狭之别,即在数学上是不相似的,但计算体积的公式相同。刘徽对非标准的阳马和堑堵也有论述。

《九章算术注》中不仅使用单色棊,而且还用多色棊,阳马术注中有赤棊和黑棊。为了论证的需要,有时还要分割棊,上面已有一些例子。在构造牟合方盖时八个小立方体各被分割成四棊,按照祖暅的说法:"规内一棊,谓之内棊。规外三棊,谓之外棊。"

三

无论是棊验法还是用棊证明,都有局限性。

、 棊验法只能对特殊的立体进行验证,而不能代替证明。刘徽选择直线型立体,特别是比较标准的,作为棊验对象。唯一例外就是牟合方盖模型。所以棊验主要适用于直线型立体。尽管棊验结果可以推广到一般,但它仅是对几个特例的验证。不过应注意到,棊验法是对已有公式的验证,不存在进一步归纳推广的问题。

另外,它还受到棊和被验证立体的限制。刘徽对此很清楚,他举例说:"鳖臑殊形,阳马异体。然阳马异体则不可纯合。不纯合,则难为之矣。"所以这种情况下用棊验法就有一定的困难。

棊在论证中的作用是辅助性的,不是关键的,只能在论证的一定步骤上使用它。例如,阳马术中只在第一步用棊,以后各步就主要靠"情推"了。

当然,用棊也有不少优点,其中直观性是最为明显的一个方面。

四

棊究竟是什么？这似乎是一个不成问题的问题。现在流行的解释是：棊是立体几何模型。而且似乎从未有人怀疑过它。但这样讲未免失之于简单化，因为由此会造成一定困难。

棊不一定是实物几何模型。如果必须是实物，就存在具体制作每一个棊的问题，“牟合方盖”由八个边长为一寸的立方棊经过两次“规”之后得到，内棊和外棊都很小，难以加工。在当时条件下，不论用何种材料制作它在工艺上都不太可能。刘徽在验证刍童公式时涉及到七十二棊。尽管棊可重复使用，但仅注《九章》他就须百余各种棊，而且均一尺大小。这似乎不太可能。

可以推想，刘徽确有若干实物模型，但不会有几十个、上百个。他不必有如此之多。我们认为，棊的原意是指几何模型，但刘徽的棊不一定是实物。综观刘徽用棊的情况，可知，他可以不用实物棊而很好的完成自已所有的论述。因此，在刘徽那里，多数情况下棊只是存在于思维之中的概念，它来源于现实，但不指实物，由实物升华而得。棊这个概念性的模型，对刘徽的数学思维和逻辑性推理有很大的帮助。正因为棊存在于思维和推理之中，它才可在实践中被方便地“分割”、“拼合”，才会有各种非标准棊。因此，刘徽的棊验法，用棊推理等用棊过程，几乎都是在不用实物的情况下完成的，可谓“纸上谈兵”。

我们说刘徽不使用实物几何模型，不仅没有降低他的学术水平，没有低估他的研究方法和手段，相反，这更加说明了他有很高的逻辑思维和形象思维能力。

总之，刘徽在《九章算术注》中大量应用了立方棊、壍堵棊、阳马棊、鳖臑棊，且棊有标准和非标准之分。但是，把棊用于推理和论证有其局限性，它只能用于某些方面。棊主要是存在于观念中的。

参考文献

〔1〕李迪：“中国古代的体积算法”，《数学教学》1957 年第 8 期。
〔2〕杜石然：“我国古代的体积计算”，《数学通报》1959 年第 5 期。
〔3〕梅荣照：“刘徽《九章算术注》的伟大成就”，《科学史集刊》(6)，科学出版社，1963。
〔4〕李迪：“刘徽的数学推理方法”，《〈九章算术〉与刘徽》，北京师范大学出版社，1982。
〔5〕白尚恕：“《九章算术》与刘徽的几何理论”，同上。
〔6〕白尚恕：《〈九章算术〉注释》，科学出版社，1983。
〔7〕郭书春：“刘徽的体积理论”，《科学史集刊》(11)，地质出版社，1984。
〔8〕刘洁民：“浅论刘徽对羡除公式的证明”，《中国数学史论文集》(一)，山东教育出版社，1985。

刘徽《海岛算经》的测量方法研究

冯立升
(内蒙古师范大学科学史研究所)

刘徽的《海岛算经》(以下简称《海岛》)是我国古代第一部关于测望术的专著,它主要讨论高度和距离的间接测量方法。该书的测量方法依据的数学原理正确,实用价值也很高。过去对《海岛》一书的研究很多,但集中于讨论数学原理上,而对测量术本身的问题论述较少。本文将对《海岛》诸题的测量术进行专题探讨,希望能引起进一步的讨论。

一 《海岛算经》的测量方法

《海岛算经》原名为《重差》,开始是被附于刘徽注《九章算术》之后;唐初将其分离而另行单本,改称此名。它所讨论的是在目标物不能靠近(或难以靠近)情况下的测高与测远问题。这样较为复杂的问题,仅用《九章》的勾股测量术是难以解决的。刘徽在研究古代测量术的基础上"辄造重差",提出了新的测量方法。他在《九章注》的序中说:"凡望极高、测绝深而兼知其远者,必用重差。"即用他所创立的重差测量术解决问题。在书中,他考虑到实际测量的各种问题,设计了不同条件下的测量方法:"度高者重表,测深者累矩,孤离者三望,离而又旁求者四望"。根据不同测量问题的地形条件,要利用表和矩等工具进行两次或两次以上的重复勾股测量。

现传本《海岛》共有九个测量问题。为了说明刘徽的测量术,先引述其中三个有代表性的问题。

第一题为:"今有望海岛,立两表齐高三丈($EA=HC=h$),前后相去千步($AC=l$),令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步($AF=a$),人目著地取望岛峰,与表末(E)参合。从后表却行一百二十七步($CG=b$),人目著地取望岛峰,亦与表末(H)参合。问岛高($PQ=y$)及去表($AQ=x$)各几何。""答曰:岛高四里五十五步,去表一百二里一百五十步。"(图1)

由术文得知:

$$y=\frac{hl}{b-a}+h,\qquad x=\frac{al}{b-a}$$

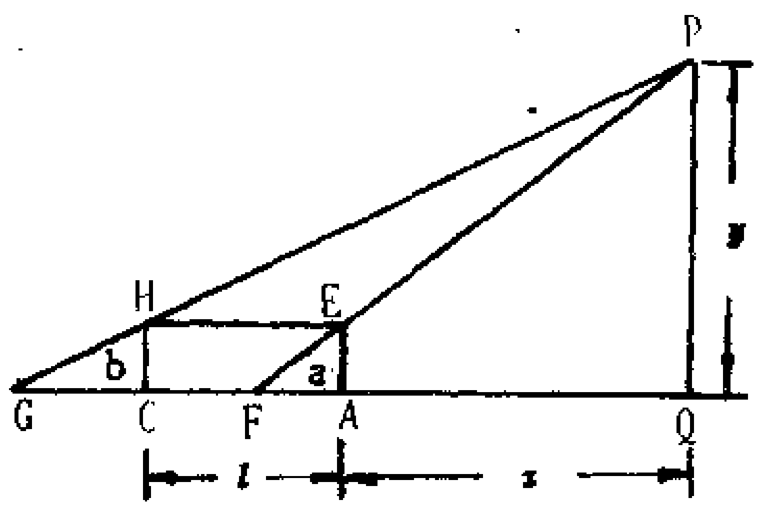


图 1

第四题："今有望深谷，偃矩岸上，令句高六尺($AB=AB'=h$)，从句端望谷底入下股九尺一寸($BC=a$)。又设重矩于上，其矩间相去三丈($BB'=l$)。更从句端望谷底，入上股八尺五寸($B'C'=b$)。问谷深($BQ=y$)几何。"(图 2)

由术文得所求 $y=\frac{lb}{a-b}-h$

此题求得谷深 $y=41$ 丈 9 尺。

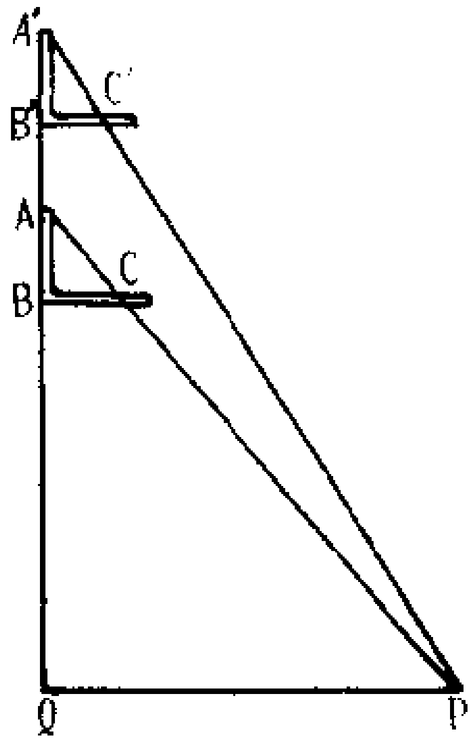


图 2

第六题："今有东南望波口($AB=x$)，立两表(C、D)南北相去九丈($CD=l$)，以索薄地连之。当北表之西却行去表六丈($DE=a$)，薄地遥望波口南岸(A)，入索北端二寸($DP=h$)。以望北岸(B)，入前所望表里一丈二尺($PQ=k$)。又却后行去表十三丈五尺($DF=b$)，薄地遥望波口南岸，与南表(C)参合。问波口广(x)几何。"(图 3)

由术得

$$x=\frac{k(b-a)}{\frac{hb}{l}-a}$$

此题求得波口广 $x=1$ 里 200 步。

《海岛》九题测量术可用表 1 做一概括。

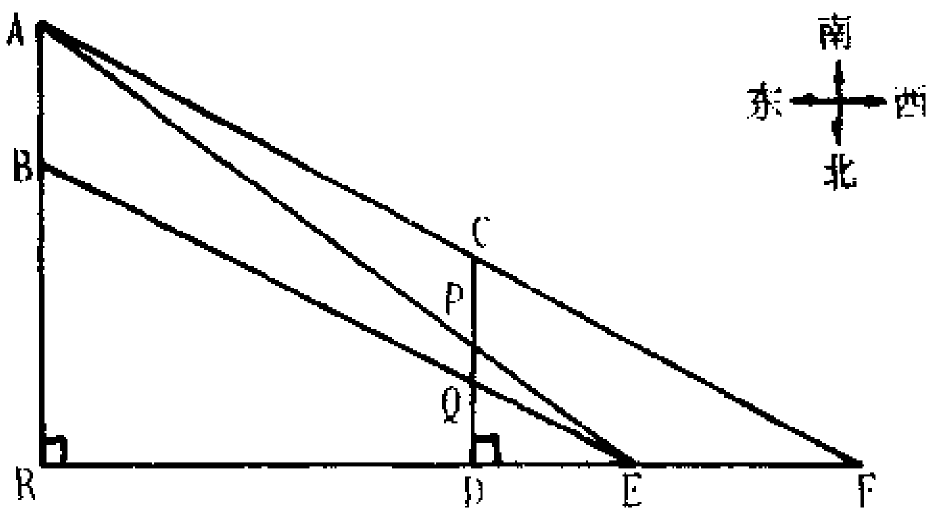


图 3

《海岛》有三种测量术：

(1)重表法。上述第一、二题用于解决测高远的问题。此法是《九章》测山高术的发展，也是汉代测日高术的改进。

(2)索表法。第三、六题用以解决测量城广、城远和河宽。《淮南子》和《九章》已用立表连索法测远近，但限于一次测望。刘徽则由两或三次测望来解决更为复杂的测量问题，推广并发展了这种方法。

(3)累矩法。第四、五及七至九题用此法。一次用矩测高、远、深在我国早已有之，刘徽则用矩两次或多次，解决了一次测望所不能解决的问题，推广了矩测法，创立了新的测量术。

表 1 《海岛》九题的测量术

题序	题名	所求	测量工具	测望次数
一	望海岛	岛高与岛远	表	两次
二	望松	松高与山远	表	两次
三	望邑	邑广与邑远	表、索	两次
四	望深谷	谷深	矩	两次
五	望楼	楼高	矩	三次
六	望波口	波口广	表、索	三次
七	望清渊	水深	矩	四次
八	望津	津广	矩	三次
九	临邑	邑广和邑长	矩	四次

二 对测量方法的分析与讨论

《海岛》各题所用测量数据多数附合实际，可见是在测量实践中提炼、编选出来的。如第三题邑方三里四十余步，第四题楼高八丈，第六题波口广一里二百步，都是合乎情理的。[1]从现代测量学角度看，该书的测量术切实可行，实用性非常明显。

刘徽将《海岛》附于《九章》之末，主要目的可能是论述重差术测算所依据的数学原理。因此，他没有充分解释测量术本身的一些内容。由于该书重点是要说明测量的数学原理，不能排除某些测量题中的地形、地物条件只是一种假设。尽管如此，从中仍能发现许多有价值的东西。

1. 测量工具与测量的技术要求。

《海岛》中的测量工具有表、索(测绳)和矩，在古代很早就有一定的操作使用要求。表是测量用的标杆，它在最初主要用于测量日影长度和定向，后来也用于测量天体和地物的高远。《考工记》、《淮南子》、《周髀算经》等典籍对用表操作的要求都有记载：在立表前先要用水平之法测量地面是否水平；立表时要以悬挂重物之绳为准，使之与地面相垂直；用表测量时用“叁望”法，即测量目标、量具(或量具端点)和观测者人目须在一条直线上。用重表法操作也须满足这些要求。

矩是一种直角拐尺，在古代既用于作图，也用于测量，但《海岛》中的矩却专用于后者。它的尺寸很大，长边可达两、三丈。第五、九题中的矩，上面还分别安装了附件“小表”和“横句”，来解决更复杂的测量问题。这在测量工具上无疑是有所创新的。用这些大矩测量时必须使矩的一边保持严格水平位置，才能使所测结果准确。与刘徽同时代的数学家赵爽对这一点有深刻的认识。他在为《周髀算经》中商高答周公问用矩之道一段作注时指出：“以水绳之正，定平悬之体，将欲慎毫厘之差，防千里之失”。除保证使大矩的一边铅垂，另一边水平外，有时还需要有固定矩尺的辅助性装置。《海岛》有五题用累矩法，都要求自下而上在两处设矩，进行两次或两次以

上的测量。用此法测量须知道两矩的高差和水平距离。有一题同一铅垂线上所设两矩上下相距四丈，这需要有安置工具的设施。还有一题两矩高差为五十一步，水平距离为二十二步。从当时技术水平看，取得这些数据虽然可能，但并非易举。由此可知，实际测量的难度是很大的。

在使用重表法时还要求前后表底部保持在同一水平面上，否则会影响测量精度。《海岛》中有两题表间距分别为一千步和五十步。对此要求，后者较易做到，前者却很困难。当两表距离较远时，需用水平仪先进行抄平工作。在汉代我国已有了较高水平的水准测量技术。[2]据《汉书·沟洫志》载，齐人延年有"可案图书，观地形，令水工准高下，开大河领上，出之胡中"的建议。这里的"水工"是水准测量人员，"准高下"即水准测量。尽管到刘徽时代已具备在较大范围内进行水准测量的能力，但因古代水准测量工具比较简陋，要使前后两表在一千步的距离内控制在同一水平面内，难度相当大，一般会产生较大的误差，影响测算结果的精度。

采用索表法时，对立表连索所选取的方向有严格的要求。如第六题波口(AB)为南北向(参在见图 3)，而所立两表(C、D)也必须取南北向，连索方向要与波口方向平行。另外，却行去表的方向须保持与波口(AB)和连索方向垂直，这需测定直角。满足了上述要求，计算结果才有实际意义。我们不太清楚刘徽立表连索的定向方法。一种可能是，先立表"参望"测定出波口 AB 的一条延长线 BR，在其上一点 R 测设直角，可定出与 BR 垂直的直线 RF；在此线上一点 D 测设直角，可定出与波口同向的直线 DC，以点 D 立一表，在 DC 上选点 C 立另一表。在测定出连索取向的同时，实际上也确定出了却行去表的方向 DF。另外，估计刘徽的时代是用矩来测定直角的。

2. 测量精度与误差估算

在实际测量中，影响重差术精度的因素有许多，但其中地球曲率对测算精度的影响和人眼分辨能力对观测精度的影响是两项主要因素。

下面我们通过分析这两项因素造成的误差来对《海岛》的测量术做精度估计，由于重差术是在把大地看作平面情况下应用的，不考虑地球曲率的影响，因而用重差术测算的结果会有系统误差。中国古代把静止的水面视为绝对平面，并作为测量标准。刘徽在测望海岛一题中也是这样看待的。由于地球不是平面，在高程测量中用平面代替地表曲面应有一定限度，否则误差较大。在距离测量中，这种限度可放得较宽。测望海岛一题中目标距观测者太远，对高程测量来说，已远超出通常情况下用平面代替曲面的允许范围，测算结果的误差会相当大。下面具体做一些分析。

在现代测量学中，一般把大地水准面近似认为是一个半径为 R 的球面。在图 4 中，设 A、B 两点在同一水准面上，高程相等。又设 P 为海岛山峰，AE、CH 为前后两表。那么，AQ 为用重差法所得岛远，PQ 为测算求得岛高。实际岛高为 PB，所产生的高程误差为：

$$\Delta y = BB' + (PB' - PQ)$$

其中 $BB'=OB'-OB=R(Sec\theta-1)$，因 θ 值很小，可推得 $BB'\approx\frac{D^2}{2R}$。$D=\overset{\frown}{AB}\approx AB'$，而 $B'Q$ 与 AB' 相比要小得多，误差估算时可取 AQ 代替 D。原题岛远 $AQ=102$ 里 50 步，按魏时一尺合今 24.12 厘米换算[3]，约为 44.32 公里。将此值代入式中可求得 $BB'=152$ 米，约合 105 步。又因

$$PB' - PQ' = PQ(\frac{PB'}{PQ} - 1)$$

又 $\frac{PB'}{PQ}=\frac{P+BB'}{R}$，如将 $R=6371$ 公里和 $BB'=0.152$ 公里代上式，得 $\frac{PB'}{PQ}\approx1.000024$，而 PQ 约为

1.816 公里，因此 $PB'-PQ$ 可以忽去不计。

从现代测量学角度看，在 40 多公里的范围内高程绝对误差达 150 多米，误差显然相当大。但对于象海岛山峰这样特别高大的被测物，当时是难以直接测量高度的，而采用间接法测量，有些方法也因地形条件限制而无法实施，采用重差术测量，在当时不失为一种有效的方法。由于目标物非常高大，测高的相对误差还不算特别大，此题的相对误差为

$$\frac{\Delta y}{y}\approx\frac{BB'}{PB}\approx\frac{BB'}{PQ+BB'}=7.79\%$$

对于精度要求不高的估测，重差术的测算结果仍有一定意义。

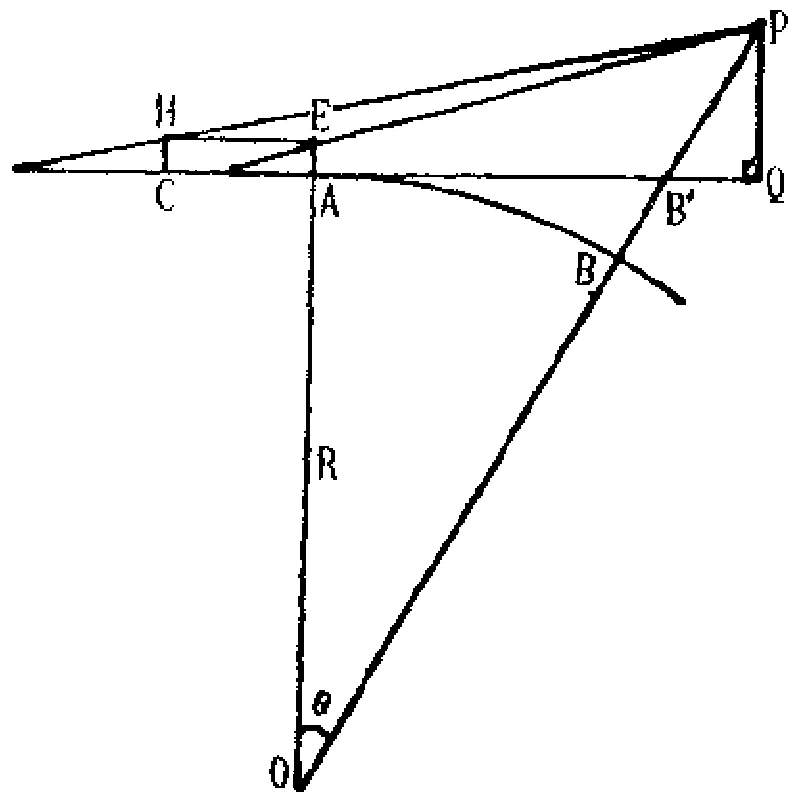


图 4

由于人眼的分辨能力有限，测量中会产生一定的观测误差。此项误差对高程测量的精度影响较大。人眼的极限分辨能力为 60″，设距离 $D=44$ 公里，则此项误差 $m=\frac{60''\cdot D}{\rho''}$，$\rho=206265''$[4]，将具体数据代入可得 $m\approx12.8$ 米，测望海岛两次测望的积累误差显然要更大，但这一误差要比地球曲率的影响小得多。

这一题的距离误差 $\Delta x=(AB'-\widehat{AB})+BQ$，$AB'-\widehat{AB}=\frac{\widehat{AB}^3}{3R^2}\approx\frac{AQ^3}{3R^2}$，约为 0.7 米。$B'Q=PQ\cdot tg\theta$，因 θ 角很小，则 $B'Q\approx PQ\cdot\frac{D}{R}\approx1.8\times\frac{44}{6371}=0.0124$ 公里，$\Delta x\approx13.1$ 米。相对误差 $\frac{\Delta x}{D}\approx$ 0.030%，可见距离误差相当小。

望海岛题形式上是一个典型的重差测量问题，但从所引测量数据和所选目标物看，又是一个非常特殊的测量问题。此题未必是实际测量中的真实问题，但题中所选用的数据可能与测量实践有一定联系。刘徽大概是齐鲁一带人，他本人精于测量术，不能排除他曾对泰山做过实际测量的可能性。他在《九章注》的序中曾指出："虽天圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。"显然，他认为用重差术可以测算泰山高度。尽管这一题数据并非直接来源于实际，但刘徽在编撰《海岛》时无疑参考了某些实测结果。刘徽选望海岛题为书中的第一题，可能是为了表明重差术可以有效地用于测量"可望而不可即"的目标物，《海岛》第一题可以大概反映当时度测某些特别高大目标物时应用重差术的情况。

通常情况下，用重差术进行测量的距离范围是比较小的，因而由于地面曲率影响产生的误差也相当小。《海岛》第二题表与目标物相距只有一里多一些，应用重差术时由平面代替曲面所产生的高程误差不足 2 厘米，距离误差也不足 2 厘米。但是因人眼分辩能力有限所造成的观测误差相对大一些，约为 0.13 米。《海岛》中用累矩法和索表法的测量例题，距离范围均不超过 1 公里，地球曲率的影响很小，可以忽略不计。索表法只用于距离测量，只要被测目标可以看的比

较清楚，便不会产生大的误差，因而精度较高。《海岛》第二至九题反映了当时重差术在普通测量中应用的情况。这些测量题的距离范围较小，各种因素产生的误差也较小，其测量精度可以得到较为满意的检验。

重差术的测算结果精度还与其他一些因素直接相关。以重表法为例，表间长度 l，两表地点与观测目标的相对位置都会影响结果精度。重差公式为：

$$y=\frac{hl}{b-a}+h$$

设 $y_o=y-h$，通过分析 y_o 的误差，便可知 y 的误差，y 和 y_0 的绝对误差相同。当 h 比 y 小得多时，y_o 的相对误差可看作是 y 的误。前者为

$$\begin{aligned}\delta_o=\left|\frac{dy_o}{y_o}\right|&=\left|\frac{d(l)}{l}+\frac{d(a)-d(b)}{b-a}\right|\\&\leqslant\left|\frac{d(l)}{l}\right|+\left|\frac{d(a)-d(b)}{b-a}\right|\\&\leqslant\left|\frac{d(l)}{l}\right|+\left|\frac{d(a)}{b-a}\right|+\left|\frac{d(b)}{b-a}\right|\end{aligned}$$

上式表明，假如 a,b,l 的测量误差 $d(a)$、$d(b)$ 和 dl 固定不变，那么 l 越长，二次却行差 $b-a$ 越大，即离目标前表越近，后表越远，计算结果越精确。但实际测量并不一定如此。尽管 $d(a)$ 随前表与目标物距离 x 的缩短会有所减小，但 $d(l)$ 却随 l 的拉大而增大，$d(b)$ 也随 $x+l$ 的加大而增大。因此必须予以综合考虑。通常 l 可直接度量，dl 较小，可忽略不计。为了提高精度，应尽可能减小 $d(a)$、$d(b)$，并尽量增大 $b-a$。这就要尽可能缩小 x，取 l 适当。当 l 太小时，导致 $b-a$ 太小，这会增大误差；当 l 太大时，$x+l$ 很大，观测误差 $d(b)$ 会增大。《海岛》第一题取 $l=1000$ 步，l 已够大，但 $b-a=1$ 步，仍然很小，说明 x 与 $x+l$ 都非常大。$d(a)$、$d(b)$ 都较大，这必然导致测算 y 的结果不太精确。《海岛》第二题取 $l=50$ 步，$a=7$ 步 4 尺，$b=8$ 步 5 尺，$b-a=1$ 步 1 尺，比较合理，其测算结果应当比前一题高许多。

对于累矩法也可进行类似分析。累矩法的结果精度与矩间距，两矩与目标的相对位置都有关系。为了提高精度，通常应尽量使位于下边（或前边）的一矩靠近目标，而矩间长矩选择应适中。《海岛》累矩法各题所引数据大多比较合理。

三　与西方早期测量术的比较

古埃及和古希腊虽早有间接测量法，但仅限于一次测望。据传古希腊数学家泰勒斯（公元前 640 至 546 年左右）曾在埃及测算过金字塔高度。一种说法认为：当他的影长和他身高相等的时候，他测量出金字塔的影长，便求得了塔高。较迟的说法认为，他立下一根杆子，同时测量杆影和塔影长度，便求出了塔高。据说他还利用三角形全等关系测量过船舶到海岸的距离。[5]泰勒斯的方法只能解决某些比较特殊的测量问题，在应用上有很大的局限性。而《海岛》的方法不但达到了重差理论的高度，而且在应用上具有很大的通用性。

欧洲的测量术在很长时期内没有改进，直到中世纪末才有了进展。一种被称为"十字杖"（*Cross－staff*，也称 *Baculum* 或 *Jacob*）的工具是欧洲当时使用的一种重要测量工具。十字杖由一长四呎的矩形杆及附于其上的横杆组成，横杆保持与矩形杆垂直并可沿矩形杆滑动。这种工具

用来则量那些无法到达和不能直接步测的线段长度。测量时要大致站在该线段的平分线上两个不同地点，并使横杆的两端对准所测线段的两端。矩形杆上带有刻度，两次测量可得两个数据，因横杆长和观测者两点之间的距离为已知，通过计算可求得被测线段的长度。[6]此方法与《海岛》中的累矩法原理相同，测法也相近，但已比我国的应用晚了一千多年。

十字杖最早出现于十四世纪，它在欧洲使用了相当长的时间，在 1594 年戴维斯的象限仪发明后很长一段时间才逐渐被取代。在 1556 年巴黎的一个出版物上有用十字杖测量的例子。[7]直到十七世纪，这种工具仍在欧洲使用，在 1641 年意大利波隆那的出版物上仍有用十字杖测量的实例(图 5)。[8]

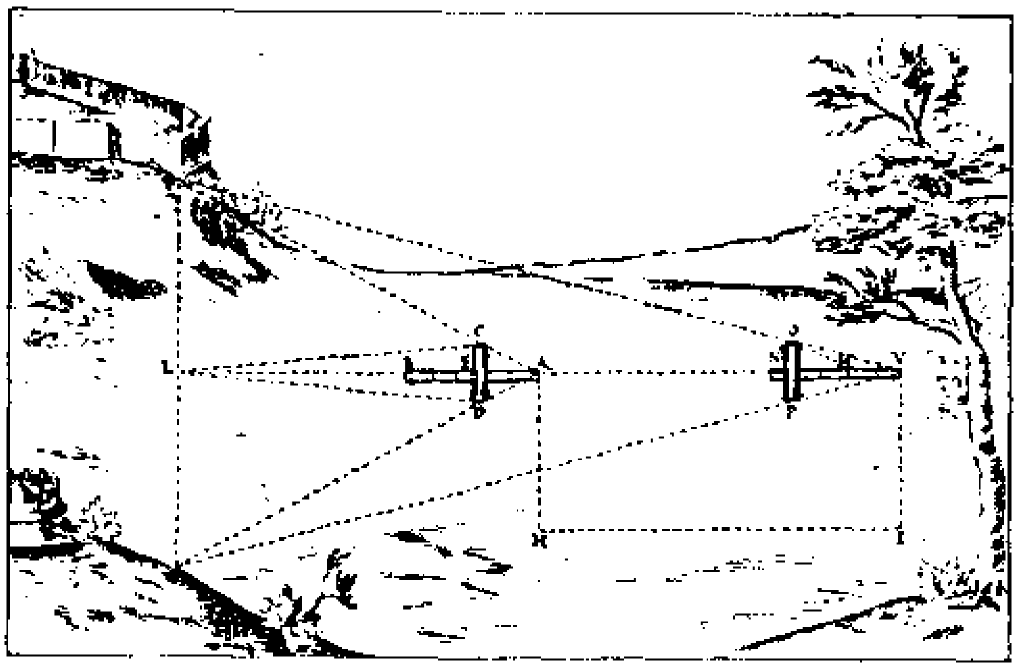


图 5　十七世纪欧洲测量图

欧洲相当长的时期内在普通测量方面采用的是几何学的原理，直到十六世纪才有了新的变化。由于三角学开始从天文学中分离出来，平面三角学得到了很大发展，三角法在测量中变得重要起来。象限仪是测量角度的工具，它一被发明，便成为当时重要的测量仪器。依据三角学原理，使用象限仪一类量角工具，可以进行各种间接测量。明未来到中国的意大利传教士罗雅谷(*J. Rho*，1590—1638)曾编著《测量全义》一书，卷二主要讨论用象限仪和另一种工具“矩度”做间接测量的问题。据考证，《测量全义》中的这些问题主要摘译自意大利著名数学家兼测地学家玛金尼的《平面三角测量》一书。[9]玛金尼(*G. A. Magini*，1555—1617)的这部书出版于 1604 年，此书对三角测量问题的研究，基本可以代表欧洲当时测量术的水平。从《测量全义》所介绍的一些间接测量方法看，欧洲当时的测量术也并不比刘徽《海岛算经》的测量术优越多少。我们选一有代表性的例子做一比较。

《测量全义》卷二第三题为“望高测远”问题，有二支九法，讨论的都是一次测望不能解决的问题，与《海岛算经》第一题相类似。如一支一法是用象限仪两次测望求远的问题：“甲乙为山或楼台，而直线不能至甲。欲借乙顶测丙与甲相距之远。”(图 6)其测量方法是：先在丙(C)点用象限仪测出乙丙丁角($\theta_1=\angle BCA$)，直接量出丙丁($CD=l$)，再于丁(D)点用象限仪测出乙丁丙角($\theta_2=\angle BDC$)。这样，对于三角形乙丙丁($\triangle BCD$)，由已知条件可求得乙丙(BC)边。

即

$$BC = \frac{l}{sin(\theta_1 - \theta_2)} \times sin\theta_2$$

然后可求得甲丙(AC)边,即

$$AC = BC \times sin\theta$$

从测量的难易程度看,三角测量法与《海岛》重表法是相当的。望远镜在十七世纪末才开始用于普通测量,《测量全义》介绍的象限仪,结构十分简单,要用人眼直接观测,测量精度也并不太高。从计算方法上看,重表法只需直接套用重差公式;而这里所用的三角法需分步计算,先求出一中间量(如 BC)然后利用三角函数关系计算。三角法需知所测角度的三角函数值才可入算,而重差法所测数据直接可以入算,计算方法也十分简单。另外,三角法需先测算一中间量,实际上增加了一项误差。三角测量法优越之处主要在于其通用性强,应用比较灵活。但在测量计算方面,《海岛》的重差法也有其优越性。

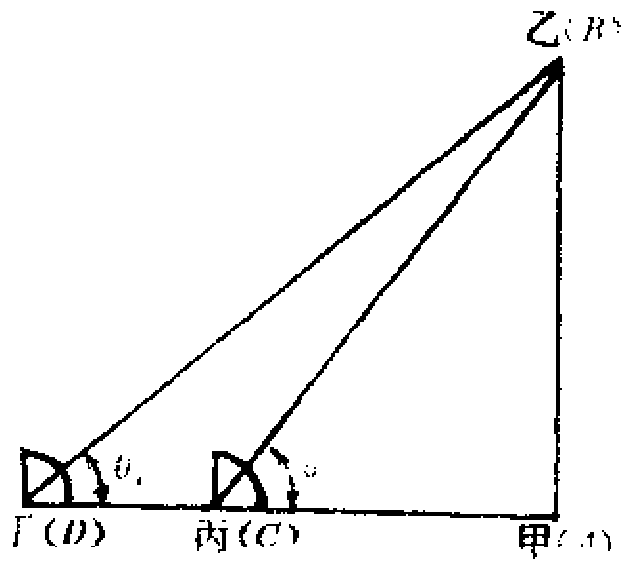


图 6

从以上讨论可以看出,《海岛》的测量术不仅当时在世界上十分先进,而且到了十六、十七世纪与西方测量术相比仍不逊色。《海岛算经》作为一部测量数学的专著,在世界数学和测量学史都占有一定的地位。

参考文献

〔1〕 沈康身:《〈九章算术〉与刘徽的测量术》,载《〈九章算术〉与刘徽》,北京师范大学出版社,1982,第 185 页。

〔2〕 冯立升:《中国古代的水准测量技术》,载《自然科学史研究》,1990 年第 2 期,191 页。

〔3〕 吴承洛:《中国度量衡史》,商务印书馆,1937 年,第 191 页。

〔4〕 合肥工业大学主编:《测量学》,中国建筑工业出版社,1985,第 25 页。

〔5〕 *H.* 伊夫斯著,欧阳绛译:《数学史概论》,山西人民出版社,1986,81—82 页。

〔6〕 Needham、*Science and civilization in china*, Vol III, Cambridge university, PP573—574, 1959,

〔7〕 同〔6〕。

〔8〕 Vera Sanford, *A short History of Mathematics*, Houghton Mifflin Company, PP 244—245, 1958。

〔9〕 白尚恕:《〈测量全义〉底本问题初探》,载《科学史集刊》第 11 期,地质出版社,1984,第 143—149 页。

《大明历》的上元积年计算

曲安京
(西北大学数学系)

在上元积年的演算史上，祖冲之大明历(462)历来备受关注，因为它是第一部将所有历法项目皆命起大明上元的历法。

这些历法项目共计 11 条：日名，岁名，回归年，朔望月，交点月，近点月及五星会合周期。

如果这些事项全部参与大明上元的推算，则需要求解 10 个一次同余式构成的同余式组，数据都是天文数字，要古人克服由此产生的技术性障碍是很难想象的。至今也找不出能够展示上述假想的演算实例。

北凉赵欧的元始历(412)首破古章法，扩充闰周，置寻求合朔冬至之年为入算起点的上元算法于不顾。这一重大改革是为了提高历法精度，积年之法因此调整，治历者不得不另辟途径，演纪之法由是初见端倪。

在元始历至傅仁均戊寅历(626)二百余年间，大约出现了 20 部此类历法，其中以大明历最具代表性。探讨大明历上元积年计算，是弄清这个时期积年之法的一把钥匙。

《宋书律历志》中记录了祖冲之为答辩戴法兴对其大明历的非难所著的《驳议》，其中详述了大明五年(461)他对冬至前后日影长度变化的观测，并首次提出了推算冬至时刻的数学方法。他写道："又臣测景历纪，躬辨分寸，铜表坚刚，暴润不动；光晷明洁，纤毫俱然。据大明五年十月十日，影一丈七寸七分半，十一月二十五日，一丈八寸一分太，二十六日，一丈七寸五分强，折取其中，则中天冬到，应在十一月三日。求其蚤晚，令后二日影相减，则一日差率也。倍之为法，前二日减，以百刻乘之为实，以法除实，得冬至加时在夜半后三十一刻，…今以臣历推之，刻如前，窃谓至密，永为定式。"[1]

据此可知，祖冲之推算大明五年的冬至发生时刻在 11 月 3 日夜半后 31 刻。

我们试以日名，岁名，回归年及朔望月长度为先决条件，利用上述冬至时刻，来推求大明上元。

大明五年(461)岁名辛丑，由于大明上元"岁在甲子，天正甲子朔夜半冬至，日月五星聚于虚度之初，阴阳迟疾，并自此始。"故是年序数 $R_0=38$(上元甲子年为 1，乙丑为 2，…)。通过计算，知大明 5 年 11 月 3 日日名为乙酉，其序号为 21(日名甲子为 0，乙丑为 1，…)。

大明历基本历法数据摘要如下：

回归年 $\frac{T}{b}=\frac{14423804}{39491}$　　章岁　$a=391$　　日法　$A=3939$　　章月　$\alpha=4836$

朔望月 $\frac{B}{A}=\frac{1163321}{3939}$　　月法　$\beta=116321$　　元法　$C'=92365$

其中　$(AT,bB)=B\cdot\frac{b}{a}=101\cdot B$

因大明五年十一月三日乙酉冬至，距 11 月合朔时刻 R_2 大约 2 日，不妨令 $R_2=2+\frac{r_2}{A\cdot b}$，又令是年冬至时刻距前一甲子时夜半时刻为 $R_1=21+\frac{r_1}{b}$，则以日名，岁名，回归年及朔望月为先决条件，可列如下同余式组：

$$N_o\equiv 38(mod\quad 60) \tag{1}$$

$$\frac{T}{b}N_o\equiv 21+\frac{r_1}{b}(mod\ 60) \tag{2}$$

$$\frac{T}{b}N_o\equiv 2+\frac{r_2}{A\cdot b}(mod\ \frac{B}{A}) \tag{3}$$

欲使上述同余式组有解，须适当选择余数 r_1 与 r_2，选择范围不能太窄，否则无法保证有解；亦不宜太宽，否则历取时刻将与实测偏离过大，与治历精神相悖。

将满足(2)式的冬至时刻控制在实测值夜半后 31 刻正负一个时辰以内，则有

$$\left|\frac{r_1}{b}-\frac{31}{100}\right|<\frac{1}{12}$$

故 r_1 的取值区间为 $8951\leqslant r_1\leqslant 15533$。

合朔距冬至时刻的 R_2 的误差范围也应限定在正负一个时辰以内，但由于不知合朔时刻的实测时间，故暂将其控制在 11 月初一以内，此时有

$$\frac{-31}{100}\leqslant\frac{r_2}{A\cdot b}\leqslant\frac{69}{100}$$

即 r_2 的取值区间暂定为 $-101\times 477446\leqslant r_2\leqslant 101\times 1062702$。

由于(2)式有解的充要条件为

$$101\cdot B|(2A\cdot b+r_2)$$

而 $\frac{2Ab+r_2}{101\times B}=23+\frac{101\times 43790+r_2}{101\cdot B}$，令

$$r_2^*=\frac{101\times 43790+r_2}{101\cdot B}$$

则有 $0\leqslant r_2^*\leqslant 12$。于是(3)式化为

$$144\cdot N_o\equiv 23+r_2^*(mod\ 391) \tag{3'}$$

又，将(1)式代入(2)式，化简得，

$$9589n\equiv 1316+\frac{r_1-8941}{60}(mod\ 39491)$$

因 $(9589,39491)=1$，故上式有解的充要条件为 $60|(r_1-8941)$。令 $r_1^*=\frac{r_1-8941}{60}$ 则有 $0\leqslant r_1^*\leqslant 109$。从而将上述同余式组化为

$$N_o=38+60n \tag{1'}$$

$$9589n\equiv 1316+r_1^*(mod\ 39491) \tag{2'}$$

$$144N_o\equiv 23+r_2^*(mod\ 391) \tag{3'}$$

求解(2′),得

$$n \equiv 37016 + 6750 r_1^* (mod\ 39491)$$

代入(1′),得

$$N_o \equiv 2220998 + 405000 r_1^* (mod\ 60 \times 39491)$$

代入(3′),由于 391|39491×60,故化简可得

$$4r_1^* \equiv 235 + r_2^* (mod\ 391)$$

其中 $r_1^* \in [0,109]$,$r_2^* \in [0,12]$,由于 r_2^* 的取值区间较小,为便于选择合适解,将上式化为

$$98 r_2^* \equiv 39 + r_1^* (mod\ 391)$$

当 r_2^* 取遍 0,1,…,12 时,凡使 $0 \leqslant r_1^* \leqslant 109$ 且满足上式者为正解,其结果如下表所示:

r_2^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r_1^*	352	59	157	255	353	60	158	256	354	61	159	257	355

当 r_2^* 分别取 1,5,9 三个数时,r_1^* 相应为 59,60,61,这是余数 R_2 在整日范围内任意取值所能够获得的全部解。

$$R_1 = 21 + \frac{r_1}{b}, \quad r_1 = 60 r_1^* + 8941$$

$$R_2 = 2 + \frac{r_2}{A \cdot b}, \quad r_2 = 101 \cdot B \cdot r_2^* - 101 \times 43790$$

我们对这三个解的具体内涵,分别解释如下:

1. 当 $r_1^* = 59$,$r_2^* = 1$ 时,有

$$R_1 = 21\frac{12481}{39491} \approx 21.3160 \text{ 日}$$

$$R_2 = 2\frac{101 \times 72531}{A \times b} \approx 2.0470 = (2 - \frac{31}{100}) + 0.3570 \text{ 日}$$

历法意义:11 月 3 日夜半后 31 刻 60 分天正冬至;11 月初一,夜半后 35 刻 70 分合朔。大明 5 年距上元积年,算尽

$$N_o \equiv 2220998 + 405000 r_1^* (mod\ 60 \times 39491)$$
$$\equiv 51938 (mod\ 60b)$$

2. 当 $r_1^* = 60$,$r_2^* = 5$ 时,有

$$R_1 = 21\frac{12541}{39491} = 21 \cdot 3175 \text{ 日}$$

$$R_2 = 2\frac{101 \times 537815}{A \cdot b} = 2.3491 = (2 - \frac{31}{100}) + 0.6591 \text{ 日}$$

历法意义:11 月 3 日(乙酉)夜半后 31 刻 75 分冬至;11 月 1 日夜半后 65 刻 91 分合朔。大明 5 年距上元积年,算尽

$$N_o \equiv 2220998 + 405000 r_1^* (mod\ 60b)$$
$$\equiv 456938 (mod\ 60b)$$

3. 当 $r_1^*=61, r_2^*=9$ 时，有

$$R_1 = 21\frac{12601}{39491} \approx 21.3190\text{ 日}$$

$$R_2 = 2\frac{101\times 1003099}{A\cdot b} = 2.6512 = (2-\frac{31}{100}) + 0.9612\text{ 日}$$

历法意义：11 月 3 日（乙酉）夜半后 31 刻 90 分冬至；11 月 1 日夜半后 96 刻 12 分合朔。

大明 5 年距上元积年，算尽

$$N_0 \equiv 2220998 + 405000r_1^* \pmod{60b}$$
$$\equiv 861938 \pmod{60b}$$

显而易见，这三种解所确定的大明 5 年历取冬至时刻皆在 11 月 3 日夜半后 31 刻以内，与祖冲之测算结果符合。祖氏在驳斥戴法兴对大明历的非议时详述其测算结果并称"今以臣历推之，刻如前，窃谓至密，永为定式"，十分自信，是有根据的。

可惜祖冲之没有说明对 11 月 1 日合朔时刻的测算过程。事实上前面所得三个解确定的历取合朔时刻，彼此相差皆达 30 刻以上，由于限定了 R_2 的误差在 $\frac{1}{6}$ 日（约 17 刻）以内，因此，即使我们无法得知实测 11 月 1 日的合朔时刻，亦不妨碍得到这样的结论：上述三解中最多只有一个满足我们的条件。

据大明历开篇所记："上元甲子至宋大明七年癸卯，五万一千九百三十九年，算外。"而在前述第一种情况下，得大明五年辛丑距上元积年为 51938 年，"算尽"。"算尽"比"算外"适多一年，故该解与正文相合。

至此，我们仅以日名，岁名，回归年、朔望月为基本条件，适当限定余数 R_1, R_2 即将大明上元具体演出，唯一确定。

由于祖冲之《驳论》中叙述的大明五年冬至时刻的测算，是用以答辩戴法兴的诘难的，因此不可能是信意捏造的数据，对历取 R_1 的误差也不宜随意扩大。同时，由于古人以日食定合朔，可以保证非常高的测算精度，因而我们将 R_1 与 R_2 的误差范围同时限定在实测值正负 1 个时辰以内，当不算过分。

这样一来，其它历法事项如交点月、近点月及五星会合周期不成为决定大明上元的必要条件；欲使它们同既定大明上元相配合的唯一选择，即调整各自历取数据以附会既定上元。

顺便指出，出现大明上元这样的现象，既非偶然，亦非孤例，我们可以从同余式组算法结构的算理分析入手，证明大明历以后，元代授时历以前的绝大多数历法的上元，都是通过日名、岁名、回归年及朔望月所构成的三个同余式确定的唯一选择。（具体内容将由另文叙述）

因此考查大明历如何选取交点月、近点月及五星会合周期的数据，是否均已通过调整以附会既定大明上元是一不容回避的问题。

大明历历取交点月 $\frac{J}{d}$ 与近点月 $\frac{G}{d}$ 分别为：

$$\frac{J}{d} = \frac{717777}{26377} = 27.21223035$$

$$\frac{G}{d} = \frac{726810}{26377} = 27.5546878$$

它们的精度与当时的理论值误差分别为 1.3 秒，10.4 秒。

大明历通法 d 与其日法 A 无明显的派生关系，系特拟数值。在历法史上，将交点月与近点月法度同以特立数据命取，仅此一例。

从大明历交点月与近点月的精度看，选择历取数据以配合既定大明上元的过程，应该是以调整通法 d 为主，因此我们必须同时对这两个数据的调整进行考查。

假令大明五年之前某次日全食发生月距大明上元积月 M_o，设 P_o 为当时历家掌握之交点月值，于是有

$$N_1 = M_o \cdot \frac{B}{A} \div P_o + \delta \qquad |\delta| \leqslant \frac{1}{2}$$

N_1 为上元距此次全日食所经历的交点月数。令

$$P = M_o \cdot \frac{B}{A} \div N_1$$

为初调之交点月值，它与参照值 P_o 的误差为：

$$|P - P_o| < \frac{P_o}{N_1} \cdot \delta < \frac{1}{N_o}$$

因大明五年 $N_o = 51938$，于是

$$|P - P_o| < \frac{1}{51938} = 0.000019 \text{ 日} = 1.66 \text{ 秒}$$

在南北朝时代，将交点月误差控制在这个范围是可以接受的。

确定 P 之后，再调取 d，以使

$$\left|\frac{J}{d} - P\right| \cdot N_1 < \alpha \text{ 日}$$

即令误差小于 α 日，如果取 $\alpha = \frac{1}{2}$，则有

$$|J - d \cdot P| < \frac{d}{N_1} \cdot \frac{1}{2} \approx \frac{26000}{2 \times 13 \cdot N_o} = 0.02$$

上式相当于

$$dP \equiv \alpha_0 (mod\, l) \qquad |\alpha_o| < 0.02$$

令 d 在 25000～30000 之间任意选择，凡满足上述不定同余式者，皆为合用之值。这样，以概率而论，对 100 个不同的 d 分别代入试验而获成功的概率为

$$1 - (1 - 0.02 \times 2)^{100} = 0.98$$

倘若 d 在数千个值的区间内选择，则不难取得十数个，乃至数十个合用 d，因此可以取到一系列不同但近似的近点月 $\frac{G}{d}$，由于历家测算近点月显然不及测算交点月精确，因此，每个比较庞大的通法 d 都可以确定一个理想的近点月值。所以，在与大明上元的配合过程中，交点月与近点月均有比较充裕的挑选机会。亦即，它们具备附会上元的充分条件。

在祖冲之大明历之前，历家选择五星会合周期的数据，均采用以回归年为参照的传统模式。祖冲之率先在形式上废除了日率 M 与周率 N，径以星率 M 及纪法 b 来表达五星会合周期，

$$x = \frac{M}{b} \text{ 日}$$

这一创举，从理论上讲，为提高历取五星会合周期的精度，开辟了一条光明途径。因此，这种形式一直被沿袭到授时历废止积年日法才告结束。

由于 b 为基本历法数据，在上元确定之后将不可调整，因此，欲令五星会合周期与既定上元相配合，便只能对星率 M 进行增减。这虽然是一个令人惊异的推断，我们却不得不接受这个事实。

由于五星会合周期皆比较庞大，因此在增损 M 以配合既定上元的过程中，对历取会合周期 $x=\frac{M}{b}$ 的创伤有时是相当严重的。避免或减少损失的唯一指望，就是扩大纪法 b。

那么，这种调整所造成的误差究竟在怎样的范围之内可以人为控制呢?对此有如下的误差分析：

设 $x_o=\frac{M_o}{b}$ 为实测五星会合周期，令

$$x=\frac{M_o+m}{b}$$

其中 m 为调整参数。

假定治历年前某日行星与太阳会合，是日距既定上元积日为 n_1，于是

$$\frac{n_1}{x}=\frac{n_1\cdot b}{M_o+m}=N_1+\frac{n'_1}{M_o+m}$$

其中 N_1 为上元到第 n_1 日行星与太阳会合的次数，调整 m，如果有

$$|N_1-\frac{n_1\cdot b}{M_o+m}|<\frac{b}{M_o}$$

则如此之 m 确定的会合周期 $x=\frac{M_o+m}{b}$ 做为历取数据，就能够保证在一定时期内历注见伏与实际天象的误差不超过一日。

以概率而论，在 m 次试验中，至少有一次使上式成立的几率为：

$$1-(1-\frac{2b}{M_o})^m$$

$\frac{M_o}{b}$ 做为参照值，每部历法都是差不多的。按这个概率估计，我们有如下结果。

	水星	土星	水星	金星	火星
$x_o=\frac{M_o}{b}$ 日	116	378	399	584	780
m	500	1000	1000	1500	2000
$1-(1-\frac{2b}{M_o})^m$	0.9998	0.995	0.993	0.994	0.994

为获得较高的概率，上述 m 取值较宽。事实上，由于大明历尚未采用定见推五星见伏，历法中没有考虑五星运行的不均匀性规律，按任何一次实测见伏为推算标准，都不能完全准确地预报以后的行星出没情况，因此，治历者完全不必恪守某次实测的结果，可以适当扩大

$$|N_1-\frac{n_1\cdot b}{M_o+m}|<\frac{b}{M_o}\cdot r$$

中 $r\geqslant 1$ 的限定，这样就能够大大减少 m 的试验次数。

我们以大明历前任历法元嘉历的五星会合周期为参照值，可以发现大明历对它的调整参

数 m 是充分大的①

	元嘉历 x_0	x_0 与理论值误差(分)	大明历 $x=\frac{M}{b}$	x 与理论值误差(分)	调整参数 $m=M-[b\cdot x_0]$
木星	398.8726	−16.5	398.9031	27.4	1204
火星	779.7593	−254.6	780.0308	136.4	10722
土星	378.0797	−17.6	378.0698	−31.8	−391
金星	583.9573	51.8	583.9309	13.7	−1043
水星	115.8815	5.8	115.8797	3.2	−71

由于这个时期历取五星会合周期波动幅度较大，正好与我们上述分析相吻合。

至此，我们可以说大明历交点月、近点月、五星会合周期历取数据，皆具有附会既定上元的充分条件。

综上对大明历上元积年的推算考察可以得出两个结论：大明上元是以日名、岁名、回归年、朔望月为先决条件唯一确定的；大明历中交点月、近点月、五星会合周期皆通过调整选择以附会既定之大明上元。

本文是在导师李继闵教授的指导帮助下完成的，在此谨致衷心的感谢。

参考文献

〔1〕 历代天文律历等志汇编六，北京，中华书局，1976，第一七六七页。
〔2〕 中国天文学史整理研究小组：中国天文学史，北京，科学出版社，1981。
〔3〕 李文林、袁向东：科学史文集(三)，上海，上海科技出版社，1964。
〔4〕 钱宝琮主编，中国数学史，北京，科学出版社，1964。
〔5〕 李东生：自然科学史研究，第 6 卷，第 3 期(1987)，224～237。
〔6〕 秦九韶：数书九章，上海，商务印书馆，1936，1～78。

① 历法数据与误差值参见文献〔5〕

敦煌遗书中的数学史料及其研究

王 进 玉

（敦煌研究院）

敦煌藏经洞遗书中有一些古代数学史料，其中包括算书、算经、算表等手抄本、以及与之密切相关的计量、衡量等史料；此外，还有古藏文数码、古藏文写本的"乘法九九表"及用回鹘——粟特文转写的汉文数字等珍贵资料。自"藏经洞"遗书发现九十年来，国内外专家学者对此进行了多方面研讨，本文试图将上述史料及其研究进展予一综述介绍。

一 藏经洞数学史料知多少

根据现已公布的国内外敦煌遗书目录及文献、核对英、法所藏遗书缩微胶卷，笔者查阅到的敦煌数学文献共有十七件。为清楚起见，现列表如下：

遗书编号	遗书名目	缩微胶卷图片数	《敦煌宝藏》卷数	参考文献
P. 2667	算书	7	123	[1] [2] [4] [6] [8] [10] [11]
P. 2490	算表	6	121	[2] [10] [11]
P. 3349	算经一卷(并序)	7	127	[1] [2] [4] [5] [6] [10] [11]
S. 19	算经一卷(并序)	1	1	[1] [2] [10] [11]
S. 5779	算经一卷(并序)	1	44	[1] [2] [10] [11]
S. 930	立成算经一卷	7	7	[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [10] [11]
S. 4661	算经	2	37	
S. 4760	算经	1	37	
S. 4569	算经	1	36	
S. 5859	算经	2	44	
S. 6161	算经	1	45	
S. 6167	算经	1	45	
S. 663	算经	1	5	[18]
P. 3102	算经	1	126	
孟 02792	算经			
李 0226	算学			
中村不折	算书			

在上表所列十七件数学遗书中，没有一件头尾完整的。从现已影印刊布的十四件来看，除

P. 2667、P. 2490、P. 3349 和 S. 930 号四件算书篇幅较多外，其余十件中有二件是 P. 3349 的残页，别的则是抄写在佛经或其它文献背面或正面末尾处；有的甚至倒写在某件社会文书的结尾处，内容大多是算题或九九歌诀。以上数学遗书中，现藏在英国伦敦不列颠博物院图书馆的 S. 19、930、5779 号和现藏在法国巴黎国立图书馆的 P. 2667、2490、3349 号共六件算术手抄本，早就引起国内外科技史学家的注意，特别是中国数学史专家李俨(1892—1963)先生，从二十年代初就进行了校录、校补、注释和综合考证等多方面研究，他的研究成果在几种学术刊物上发表[1]，并收入他的几本数学史专著中。[2]此外，中国的凌大廷、[3]王重民、[4]严敦杰、[5]赵承泽[6]先生等，英国的李约瑟博士[7]，日本的薮内清，[8]那波利贞[9]教授等也对这六件遗书的部分或全部内容作了研究。比利时鲁文天主教大学李倍始教授在李俨工作的基础上进行了全面的研讨。[10]最近许康先生又对这六件算书中包含的科学与社会信息进行了综合探讨。[11]李俨先生曾讲："据传李盛铎售与日人中村不折之敦煌卷内，亦有算术一种"。[12]王重民先生《敦煌古籍叙录》照录此文。遗憾的是经查日本国《昭和法宝目录》中《中村不折所藏敦煌遗书目录》和其他日人所藏敦煌遗书目录，以及《李木斋旧藏敦煌名迹目录》、《德化李氏出售敦煌写本目录》，均无算书。所谓中村不折算书究竟有无尚存疑。另外《李氏鉴藏敦煌写本目录》中第 0226 号"算学"，[13]在近年刊行的《敦煌宝藏》中亦只有目录而无图版。[14]所以这件"算学"的具体内容至今不详。近年刊布的《列宁格勒所藏敦煌卷子目录》中披露，苏联藏"孟 02792 算经"，[15] 但具体内容也至今没有公布于世。其余 S. 663、S. 4569、S. 1661、S. 4760、S. 5859、S. 6161、S. 6167 和 P. 3102 均有缩微胶卷，但尚没有人作过专门介绍。由于敦煌遗书现流落在十余个国家和地区中，还有许多目录没有公布，所以，藏经洞数学史料的总数仍是未知的。

二　数学文献内容概述

敦煌所出数学写本反映了古代数学教学和应用的情况，其内容实用而广泛，涉及到古代乘法口诀、乘方、十进制、筹算、数码、密度，有关田亩、堤坝、度量衡等测量和计数问题，这些富于特色的数学、物理学知识在科学史、文化史上具有重大价值。今简述如下。

1. 乘法九九表

P. 3349 号标题为《算经一卷并序》，字迹工整；原件只留下了上半截，下半截已经被撕去。1935 年王重民先生在巴黎国立图书馆中发现后摄影寄给李俨教授。可是早在 1925 年 6 月刘复先生就已把这一卷本刊载在他编辑的《敦煌掇琐》中。1936 年北平图书馆向达教授在伦敦发现了 S. 19 和 S. 5779 号，他把这两份古手稿与 P. 3349 号对校之下，知道三者同属一书。S. 19 号是其中第 29 至 55 行，S. 5779 号则是第 100 行至末尾部分。该遗书为唐抄残卷，内容包括序、识、乘法表(九九表)、十进小数、度量衡制等，大多援自《孙子算经》，但两者互有出入。

算经的第三部分是九九乘法表。"九九歌"在古代从"九九八十一"开始，故名"九九"。《管子·轻重篇》有"宓戏作九九之数以应天道"，因知我国先民使用"九九"可追溯到春秋时期。从 19 世纪末叶以来，陆续在我国西北发掘出许多竹木简，也有些记载着"九九歌"，但由于在地下埋藏过久，均已残缺不全，最多的敦煌汉简也只剩下十七句歌诀。罗振玉《流沙坠简》卷中"小学术数方技术"类第五页，有："九九术残木简出敦煌北。长二百六十米里迈当(毫米)，广廿四米里迈当，现存十六句"。古法起于"九九"而终于"二二"，共 36 句，而敦煌算书中九九表

全载 45 句，始“九九”而终“一一”，说明写本相对于敦煌汉简已有所发展。

另外，P.3349 在每句下面又添“自相乘”和“分之”两种数据，如“九九八十一，自相乘得六千五百六十一，九人分之得七百二十九。”这是我国其它算经所不载的。又每段有一小结，如九九至二九，就总括一句“九九一凡总得三百九十六，自相乘得一十五万六千八百一十六。”这也是一种独创。S.5859 算经首尾残缺，原件似分上下二行竖写，上面一行仅看见最后一二字，均为数字。下面一行完整，均为若干人分之得若干。S.0663(4)中前七行的 81×81 至 9×9 的筹码实际也是九九自相乘数的具体应用。例如第一行“ 计六千五百六十一步，”实际就是 81 自乘积，只不过省略了“自相乘”三字，意思仍一目了然。

敦煌算书中共有五件“九九表”，现列表如下：

编　　号	保　存　内　容	参　考　文　献
P.3349	始于九九，迄于一一，共 45 句。	[1] [2] [4] [10]
S.930	〃　〃　〃	[1] [2] [3] [4] [5] [7] [10]
S.4569	〃　〃　〃	
S.6167	始于九九，迄于一九，共 9 句。	
孟 02792	不详。	

其中前二件李俨先生已论及，后三件至今没引起数学史研究者的注意，特作介绍。S.4569 是一件完整的九九乘法口诀表，写作七行，从“九九八十一”到“一一如一”共四十五句。其中“九九”“一一”等二字相同者，第二字用“々”表示。S.6167 为《敦煌二十咏》，卷末有九九乘法歌诀，分九行书写，上面的“九九八十一”至“一九如九”清楚，每句下面的自相乘模糊不清，其中“九九”等二字相同者第二字也用“々”表示，共九句口诀，背面抄有占卜书。另一件是《列宁格勒所藏敦煌卷子目录》中，孟 02792(旧 2145 号)九九乘法表，礼佛文。前二者国内有显微胶卷可供研究，后者目前尚未公诸于世。

以上几件九九表与《孙子算经》规格相同，但是既不同于先秦典籍中三十六句的古九九表，也不同于宋代和西方普遍使用的八十一句的大九九表。敦煌和居延两地都曾出土刻有九九歌诀的汉代木简，均不见“一九如九”、“一八如八”等九句，则此种四十五句的小九九表系汉代以后方始流行，唐代则普遍采用。

以上五件敦煌写本算术中如此详细介绍九九表，并扩充功能，一是有助于初学者提高乘、除、加法综合运算能力，二是若能记住一些数字的平方和商有利于速算，三是可供实际运算查阅。这反映了作者考虑的周详和当时数学教育的进步。

2. 田积表和计算法

P.2490 文献页幅较大，共 6 页，一律用红线划为方格。第四页背面有“广顺二年岁次壬子正月元日记”字样。可知原件写成于五代 952 年。李俨先生最早把此件称为“算表”。两根轴上以步数表示一块田亩的广与长，广长相会处即得田亩面积若干亩若干(方)步，并使用了“半亩”为单位。原表列至广长各六十步为止，它按照通常的中国方式，对各种可换乘积只提供一

次。原件手稿可能是一份实用的田亩计算表。上面有不少修改过，朱墨相杂。原件广 20 至 30 步乘 10 至 30 步，广 30 步至 40 步乘长 10 至 20 步，广 50 至 60 步乘长 10 至 20 步已残缺。章用先生曾据数学规律将其补全。[16]全表共计 15 大方格形成册页，摊开呈梯形，从表中能迅速查出边长为 10 步至 60 步的任何长方形田块面积的亩步数。我国现存历代算书未见这种表格，可说是一项首创。

P. 3349 和 S. 5779 的"均田法第一"中共残存 10 种形状田地求面积公式。其中方田、直田、员(圆)田、环田、箕田、圭田都可从《九章算术》中找到类似的内容，可知流传已久。环田"并内外周折(半)之，以乘径(按：指外圆内圆半径之差)得积步"。这是我国特有的算法。另有蛇田、鼓田、角田(原注"如牛角")，四不等田(即四边不等)算法等。其"直田"、"四不等田"、"蛇田"、"角田"、"鼓田"等名称均不见于《九章算术》，但见于《五曹算经》之"田曹"部分，甚至后四种面积的计算，也因袭《五曹算经》中的错误公式。

遗书中还有土地丈量及计算方面的知识，如 S. 4760 为《太平兴国六年(981)圣光寺阇黎尼修善等牒》，其文后为算经，可辨认两行，其余二十一行书于北面，每行记一块土地的广、长和面积，例如"丈地东西三十三步、南北二十八步，计九百二十四步"等等。

P. 3102《开蒙要训》残卷，背有"勅河西节度使牒"等文件，文字不能辨认，后面为麵𪎭多少称多少斤，其后倒写六行字迹不清，均为一亩等于长、广多少步等等的计算。S. 4661 算经中也是每块通计多少步多少亩的计算。

3. 十进制和大数记法

P. 3349 算经有十进和亿以上大数记法。亿以上为兆、京、该(陔或垓)、梓、(秭)、让(壤)、沟、间(涧)、政(正)、载、极，并申明"右孙子数，钱满载，天不容，地不载，故以载为极末也。"《太平御览》卷七百五十"工艺部"七引《孙子算经》："古者积钱，上至于天，天不能容；下至于地，地不能载，故名曰载"。二者大体相符。但南宋刻本《孙子算经》没有这段话，清代孙诒让《札迻》卷十一讲"疑传录失之。"因此，敦煌算经为校勘《孙子算经》提供了又一佚文证据。

4. 算筹与数码

敦煌算书中保存了我国古代的算筹知识。如 P. 3349 和 S. 930 中讲到"凡算者正身端正，一从右膝而起"，"凡算知法，大数左畔小右厢，六不积聚，五不单张，大小诸只，具列后详，算既人间要切，合如略举大别"，"乘除之法，言十自过，不满自当，相乘至尽则已。"此外，几件算书中还保留了汉字和对应的筹算数字。如 S. 930 中的九九表，每句下面还附有筹算数字，并将逐句得数累加，至该段最末归总。如"九九八十一，𝍰𝍠，直下八十一，𝍰𝍠"，"八九七十二，𝍯𝍡，通前一百五十三，𝍠𝍭𝍢"。直至"一九如九，𝍨，通前四百五文，𝍣 𝍤"。这是第一段。九段之后总结"都计得一千一百五十五文"。

5. 密度数据

据李迪教授考证，《孙子算经》所记载的金银铜铁铅的密度，比公元 1137 年阿拉伯人《智慧的天平》早 800 年。敦煌《立成算经》中也有相近的数据，依据李迪教授的换算列表如下：[17]

	现代比重数据	S.930	孙子算经
金	19.30	17.56	17.56
银	10.50	13.92	16.24
铜	8.93	9.28	8.7
铁	7.86	6.96	6.96
铅	11.34	—	11.02

从中可看出银的比重数《立成算经》比《孙子算经》较精确。铜的比重误差不超过4%，这在世界物理史上是一项领先的成就。而金、铁比重偏低，均因古代炼制欠纯而误差分别为9%和11.5%。

此外，S.5779中还记载了金银之比为：17.56：13.92=1.26。这个结果和被认为是公元466—485年间所作的《张丘建算经》中所载"金方重十五两十八铢，银方重十二两六铢"，(即15.75：12.25=1.286非常接近，这是古人进行实验的总结。

6. 田亩产量计算和复利

S.0663(4)算经，首部残缺，现存9行是两道应用算术题：

"计六千五百六十一步　　计五千一百八十四步

计三千九百六十九步　　计二千九百一十六步

计二千二十五步　　计一千二百九十六步

计七百二十九步　　计三百二十四步

计八十一步　　已前通计地二万三千八十五步，

共地九十六亩余四十五步，每亩七五斗，共着糉七百二十一石三斗九升九合。

麦十合石四斗。五年中间合着物本利四十九石七斗五升三合六勺五圭。"

前七行已知亩产量，求边长各为9n(n=9,8,…,2,1)的九块方田的总产量，即

$$\sum_{n=9}^{1}(9n)^2=6561+5184+3969+2916+2025+1296+729+324+81=23085=96\text{亩}45(\text{方})\text{步}$$

总产量应为：

7.5×96.1875=721.406(石)

但此算经残卷误为：

7.5×96.1865=721.399(石)

可能是在化45方步为亩的单位换算中，筹算除法时误将0.1875置筹成0.1865了。[18]最后二行讲借麦若干，"五年中间合着物本利"若干，应是复利问题。①有关复利方面的计算在大量借贷契约等社会经济文书中也有不少，对这些文书进行综合研究，就能对古代有关借贷复利方面的问题有个比较清楚的认识。

7. 度量衡史料

① "麦十合石四斗"若理解成利率14%，则本为25.840487石，五年后约翻一番。—编者注。

敦煌数学抄本中有不少度量衡方面的内容，例如 P. 3349 中的“称之所起”与《孙子算经》基本相同。“度之所起起于忽(从蚕口中吐丝为忽，忽者如一蚕丝之广－原注)”，比孙子算经详细。而且“方丈曰堵，五尺曰步、六尺为寻，七尺为常，八尺为一仞”为《孙子算经》所不载。该算经中不仅有“凡升量所起起于圭”及其黍、圭、杪、撮和石(百升)、升、升的量纲和换算。而且也有“方一尺、深一尺六寸二分受一石”等内容。S. 930 还有“三丈为段，四丈为匹，五丈为练，十丈为引”等纺织品的度量单位。

敦煌遗书 P. 2609 号《俗务要名林一卷》，S. 617 号是它的另一抄本，两件文书均为残卷。其中，P. 2609 号现存从量名“十撮为一勺、十勺为一合”开始，共存市部至手部二十一部。S. 617 号前面亦残，但比 P. 2609 号前面多出十三部，其中的数部、度部、秤部、市部记录了当时数学及度量衡制度等内容。此外，在敦煌大量社会经济文书中还有应用各种度量衡的实例，其中不少与出土文物反映的度量衡数值相吻合。此外，出土的度量衡器物和壁画中的器物形象互为印证，十分直观。关于这方面的内容，笔者另有专文论述。

8. 算术应用实例

除了前述数学基本知识外，敦煌算术中还有许多涉及社会、经济、政治、军事诸方面应用算术的一些实例。例如 P. 3349 和 S. 5779 中列出的“均由法第一”的篇目；P. 2667 中所列的对民食、军需粮食和衣物的宏观统计，军事编制、城防布署和防御设施，城周竖鹿角榍、营造时的土石方计算，以及切割方木为木枕算法等等，保存了南北朝至隋唐五代社会经济军事文化的珍贵信息。这方面的内容李倍始教授和许康先生已作了详细探讨，恕不赘述。

综上所述，“藏经洞”保存的十余件数学遗书，虽然残破不全，但就现存部分来看，大都是唐、五代时期的手抄本，是现存较早的数学史料，有的可能追溯到隋代至北朝。它们不仅时代较早，而且内容十分丰富。其中一些是久已失传或者书目上未曾见到的，它们的发现不仅为算书的校勘提供了古老的别本，而且还提供了一些不为人们所知的新内容。对这些数学文献的综合研究，对于发掘我国数学宝库无疑有重要的意义。

三　古藏文数码及其它

敦煌藏经洞遗书中有不少吐蕃文写经和其它社会经济等方面的资料。现保存在敦煌博物馆的大量吐蕃时代的古藏文写经中，发现了一卷写经的标页处写有 31—41 共十一个数码，从而保存了零至九这十个古藏文数码，十分可贵。据考证研究，这组数码与迄今仍然广泛运用于实际生活中的藏文数码完全一致。藏族在历史上曾经运用过前后交替的两套数码：古老的可以称作吐蕃数码，雍布拉康所藏吐蕃写经著录的数码堪称其典型，是漫长的吐蕃奴隶制社会的产物，公元 8 至 10 世纪间颇为盛行；与此同时，一套更加适应社会需要的新码，在吐蕃数码母体内孕育，逐渐定型。上述敦煌吐蕃写经上著录的数码即为其早期典型。两种数码在两个世纪内并行于世，吐蕃数码逐渐消失，新码则历时一千多年沿用至今。藏文的这两套数码，都曾先后对国际通用数码的形成与发展给予了重要影响，这是藏族人民对于人类文化进步作出的宝贵贡献。[18]

1981 年在日内瓦一巴黎出版的《敦煌学论文集》第二卷中，刊有法国国立研究中心的著名敦煌学家哈密尔顿(James Hamilton)博士的论文《汉文数字一至三十的粟特文对音》一文。文

中披露，在敦煌藏文写本中，有两卷(Pt. 1859A 和 1869)的背面是用回鹘一粟特文转写的汉文数字一至三十。Pt. 1859A 的上部为一至七，Pt. 1869 背面载有十二—三十，其时代可能为10 世纪，作者详细地从语言学角度考释了这些粟特文数字。[20]

1985 年在乌鲁木齐召开的敦煌吐鲁番学术讨论会上，西北民族学院少语系华侃先生提交的论文是《敦煌古藏文写卷"乘法九九表"的初步研究》。现藏巴黎国家图书馆东方手稿部的敦煌藏文写卷，依照拉鲁女士(Marcelle LaLou，1890—1967)所编的目录即有 2200 卷号左右。其中编号为 Pelliot tib'etain Touen-houang 1256 号写卷，除个别字行稍有模糊外，大部分均清晰可认，已收录在 1978 及 1980 年巴黎出版的由麦克唐纳夫人(A. Macdonald)和今枝由郎编辑并加注记的《敦煌吐蕃文书选集》影印本(单页集装)第一辑中。这是一篇用藏文音译汉字的材料，内容是乘法九九表，原文全是藏文，无标题，未署抄写人姓名。全文横书共八行，它的次序是从"九九八十一"开始，到"一一如一"终结，共 45 句。[21]这与敦煌汉文遗书 P. 3349，S. 930、S. 4569，S. 6167 等"九九表"的次序相一致，而与现今流行的九九表顺序相反，但与现在部分藏族地区民间的记法相同。P. T. 1256 号遗书的历史年代，从藏文书法判断，是当时敦煌流行的古藏文书法，苍古遒劲，无疑是属于吐蕃时期的手卷。由此可知，早在吐蕃时期乘法九九表已传入藏族中，这也从一个侧面反映出汉藏两个民族相互学习，思想文化交流之早和渊源之深。

敦煌遗书中的吐蕃数码、回鹘文一粟特文转写的汉文数字以及古藏文写卷中的"乘法九九表"对研究藏族等少数民族数学史具有十分重要的意义。

拙文请李迪教授审阅、斧正，谨致谢意。

20A

参 考 文 献

〔1〕 1. 李俨：敦煌石室算书(P. 2667 号)，《中大季刊》1926 年 6 月第 1 卷第 2 期。《图书馆学季刊》第 2 卷第 2 期(1928)。《中算史论丛》第 1 集。《图书馆》第 5 期。《西京日报》1935 年 9 月 8 日。

2. 敦煌石室"算经一卷并序"(P. 3349 号)、《图书馆学季刊》第 4 卷第 1 期(1930)。《国立北平图书馆馆刊》第 9 卷 1 期(1935)。

3. 中算书录(丁福宝、周云青：四部总录算法编附载)、《图书馆》半月刊第 5 期(1935)。

4. 敦煌石室立成算经(S. 930 号)，《图书季刊》新第 1 卷 4 期(1939)。

5. 唐代算学史，(S. 0019、S. 5779)、《西北史地学会季刊》1 卷 2 期(1938)。

〔2〕 1. 敦煌算经一卷并序(P. 3349)，敦煌算书(P. 2667)，敦煌算表(P. 2490)、《中国算学史》，商务印书馆 1938 年版，上海书店 1984 年 1 版。

2. 李俨：古九九表(一)《敦煌汉简》九九表、(二)《居延汉简》九九表。敦煌千佛洞算书和算表，(一)敦煌千佛洞《算书》、(二)敦煌千佛洞算表、(三)敦煌千佛洞《算经一卷并序》、(四)敦煌千佛洞立成算经、《中国古代数学史料》，中国科学图书仪器公司出版，1954 年 5 月初版。

〔3〕 凌大珽：敦煌石室立成算经(S. 930 号)、《图书季刊》新第 1 卷 1 期(1939)。

〔4〕 王重民：算经并序(P. 3349 号)；算书(P. 2667 号)，立成算经(S. 930 号)、《敦煌古籍叙

录》，商务印书馆 1958 年 6 月初版，中华书局 1979(新 1 版)。
〔5〕 严敦杰：中国使用数码字的历史，《科技史文集》第 8 辑(数学史专辑)，上海科学技术出版社(1982)。
〔6〕 赵承译：敦煌学与科技史《1983 年全国敦煌学术讨论会论文集》，(文史遗书编)上册，甘肃人民出版社，1987 年。
〔7〕 (英)李约瑟：敦煌遗书立成算经(S. 930 号)，《中国科学技术史》第 3 卷，1959 年英国出版．中文译本第 3 卷第 1 分册，科学出版社，1975 年。
〔8〕 (日)薮内清：历算书(池田温编敦煌汉文文献)，大东出版社，1980。
〔9〕 (日)那波利贞：《南中大学论集》第 1 卷，1954。
〔10〕 (比利时)李倍始：敦煌千佛洞算书手抄本，《中国科技史探索》，上海古籍出版社，1986 年(中文版)，1982 年英文版。
〔11〕 许康：《敦煌算书透露的科学与社会信息》，《敦煌研究》，1989 年第 1 期。
〔12〕 同〔1〕4。
〔13〕 1.《敦煌遗书总目索引》，商务印书馆，1962 年；中华书局，1983 年。
2. 黄永武主编：《敦煌遗书最新目录》，新文丰出版公司印行，1986 年 9 月台北一版。
〔14〕 黄永武主编：《敦煌宝藏》第 136 册，新文丰出版公司印行，1986 年 9 月台(北)一版。
〔15〕 同〔13〕2。
〔16〕 同〔2〕1。
〔17〕 李迪：《我国古代的比重测定和应用》，《科技史文集(12)》，上海科技出版社，1984 年。
〔18〕 王渝生、罗琳：《敦煌算术七种》，敦煌吐鲁番学科技史学术讨论会论文，河北昌黎，1989 年 8 月。
〔19〕 黄文焕：《吐蕃经卷里的数码研究》，《敦煌学辑刊》(1985 年敦煌吐鲁番学术讨论会论文专辑)，1986 年第 1 期。
〔20〕 耿升：《八十年代的法国敦煌学论著简介》，《敦煌研究》1986 年第 3 期。
〔21〕 华侃：《敦煌古藏文写卷〈乘法九九表〉的初步研究》，《西北民族学院学报》(哲学社会科学版)，1985 年第 3 期。

中算家对方程正根个数的认识

徐　义　保
（内蒙古师范大学科学史研究所）

形如 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_rx^{n-r}+\cdots+a_n=0$ 的方程，$n\geqslant2$ 时可能有不止一个正根。一般认为汪莱以前的中算家没有认识到这一点[1][2]。本文通过考察明代以前数学著作中的方程（除 $x^n=c$ 型之外）及给出的根，认为刘益、秦九韶、李冶、朱世杰等都已认识到这种方程可能有不止一个正根。

一

中算家把解方程称为"开方"，把 a_n，a_{n-1}，a_{n-2}，…，a_1，a_0 分别称为实，方法，上廉，…，下廉，隅。解方程时按这个顺序上下排列，将实和系数用算筹表出（笔算到明代才出现）。开方法最早见于《九章算术》少广章（《算数书》中是否有尚不清楚）："置积为实，借一算，步之超一等，议所得，…"虽然此法是对 $x^2=n$ 而言，但稍加改动也适于 $x^2+ax=N$。对于开带纵立方，至迟唐初王孝通就已掌握。遗憾的是在《缉古算经》中没有记载。钱宝琮先生根据《九章算术》的开立方术（求解 $x^3=N$），认为开带纵立方的方法是[3]"置实、方法、廉法、隅法四项。步之：方法进一位，廉法进二位，隅法进三位。议得初商。"对于三次以上方程的解法，宋代贾宪创设增乘开方术，秦九韶在此基础上发展成为正负开方术。《数书九章》卷五第一题"尖田求积"开方程序是"上廉超一位，益隅超三位，商位进一位。上廉再超一位，益隅再超三位，益隅再超三位，商位再进一位，上商……"。由此可知，中算家解方程时首先把实，方法，……，隅对齐摆好，然后判断是否可开？如不可开，则把方法向左移一位（上廉进二位……）再看能否可开？如不可开，则再移一位，直到可开为止。按照这一程序求得的根往往是该方程小的正根。如果中算家不知道一方程可能有不止一个正根，那么他们求得的就都是最小的了。笔者通过考察《九章算术》、《张邱建算经》、《缉古算经》、《议古根源》、《益古集》[10]、《数书九章》、《测圆海镜》、《四元玉鉴》等著作中的方程及求出的根，发现情况并不都是这样（见表一）。到了刘益（约生活于 11 世纪初）突破了二次方程二次项系数恒为一的限制，就导致了一方程可能有不止一个正根的问题。在有多个正根的情况下，宋元数学家求出的根有的是大根，有的是小根，还有的是介于大、小根之间。对上述著作进行统计有下页的表二。

从表二，我们看到宋元数学家给出的大部分是小根。在《四它玉鉴》和《测圆海镜》中非小根约占 23% 和 22% 左右。按照古代开方程序，要求出这些大根，就必须首先求得相同数量的小根。如《议古根源》第十题"直田积八百六十四，只云一长二阔三和四较共三百一十二步，问长几步？"根据"求曰"列出的方程为 $-8x^2+312x=864$。这一方程有两个正根 $x_1=3$，$x_2=36$。按照

表一

方程次数 / 方程个数 / 书名	二次		三次		三次以上		方程总数
	只有一正根	有多正根	只有一正根	有多正根	只有一正根	有多正根	
九章算术	1						1
张邱建算经	2						2
缉古算经			25		2		27
议古根源	4	6				1	11
益古集	32	20					52
数书九章	7				1	3	11
测圆海镜	46	36	17	10	11	6	126
四元玉鉴	44	39	49	20	75	45	272

表二

方程个数 / 书名	有多个正根	求出的是大根	求出的是小根	介于大、小之间
议古根源	7	2	4	
益古集	20	1	19	
数书九章	3	1	2	
测圆海镜	52	9	40	3
四元玉鉴	104	15	81	8

筹算开方程序在求得 36 之前，要先求得 $x=3$。再如方程 $-x^2+17x-60=0$(《四元玉鉴卷下之六第九题》)在求得 $x=12$ 之前也必须先求得 $x=5$。尽管《议古根源》、《四元玉鉴》等书没有明确记载已求出的小根，但这一步他们是肯定做了的。

既然宋元数学家已认识到一方程可能有不止一个正根，为什么书中每一个问题只给出一根？这个问题联系到传统数学的实用性特点。从汉代《算数书》、《九章算术》到明代程大位《算法统宗》大都是解决田亩面积、仓窖容积、水利工程、商业以及日常生活中的有关问题。数学书中的问题大部分来源于实际，因此，数学家们在解题时往往就要考虑求得的数值是否符合题设，是不是有实际意义。虚根(无数)和负根直到汪莱和李锐时才提出，就是一个很好的说明。笔者把表二中的多个正根(中算家未给出的)分别与它们原来题设进行比较，发现除《议古根源》(有三题)、《益古集》(有九题)外，都不符合题意或与常识矛盾。因此，我们认为宋元数学家在求得多个正根后，还要看这些根是否符合题意，合则留，不合则弃，正如我们今天解决一个实际问题一样。

在《测圆海镜》的细草部分和《四元玉鉴》的术曰中都有"合问"二字。这明确表明了李冶、朱世杰在求得根之后还要检算。"合问"最早见于唐代刘孝孙所做的《张邱建算经》细草，在草曰中有"合前问"、"皆合前问"等字样，其后《五曹算经》李淳风注中有"合问"、《缉古算经》求曰中

有"即合所问"。这些书中"合问"的意思是指求得的东西合乎原题所问。如原题问长几何，解答时只有当求得长以后才能说"合问"。由于这些著作中的方程(《张邱建算经》中的百鸡问题除外)只有一个正根，因此，这里的合问与今日验根的意思有所不同。但随着可能导致有不止一个正根的方程的出现，"合问"的含义也就逐渐扩大，带有验根的意义了。

刘益《议古根源》和秦九韶《数书九章》中都没有"合问"二字，但笔者认为他们与李冶、朱世杰一样要验根，方程有两个正根 $x_1=3, x_2=36$，按照开方程序应先求得 $x=3$，刘益未取 3 作答案因它不合题意。再如《议古根源》第四、五两题，均已知面积与长宽之和，分别求宽与长。据"术"列出的方程都为 $-x^2+60x=864$，但这刘益给出第四题的答案为 24，而第五题则为 36。这样就与原题中所设长、宽不矛盾。秦九韶《数书九章》"尖田求积"题有方程 $-x^4+763200^2-40642560000=0$，应有两个正根 $x_1=240$，$x_2=840$。如果取 240 的话，那就与原题"问有两尖田一段，其尖长不等。两大斜三十九步，两小斜二十五，中广三十步。欲知其积几何？"矛盾。因为只是两大斜与中广组成的三角形面积就为 585。显然秦九韶在求得 $x=240$ 后，发现不合题意，再求得 $x=840$。汪莱批评秦九韶不加考查任意取舍，专以八百四十步为答数[4]是没有道理的。同样，汪莱对李冶的批评也站不住脚。前已述及《测圆海镜》中的方程如有多个正根的话，那么除了已给出的正根外其它的根都不合题意。《测圆海镜》中有多处标有"翻法在记"。由于求一方程的最小根不会出现翻积，李冶发明"翻积法"正说明他认识到一方程可能有不止一个正根。秦九韶在"尖田求积"题开方时使用"换骨"也说明了这一点。

朱世杰在《四元玉鉴》中根据不同问题列出的方程有 8 个相同或等价。他分别给出了这些方程的所有正根。如卷上第九题"今有绫、罗共三丈，各直钱八百九十六文。只云绫、罗各一尺，共直钱一百二十文，问绫、罗尺价各几何？"。在术文中朱世杰列出了四个方程：

$$x^2-30x+224=0 \qquad (1)$$

$$-x^2+120x-3584=0 \qquad (2)$$

$$x^2-30x+224=0 \qquad (3)$$

$$x^2-120x+3584=0 \qquad (4)$$

(1)……(4)中的 x 依次为绫尺数、绫尺价、罗尺数、罗尺价。书中答案分别是 14，64，16，56。因(1)，(3)完全相同，(2)、(4)虽符号不同，但它们按筹算开方程序，所上的商完全相同，所以，朱世杰实际求得(1)和(4)的全部正根 14，16 和 64，56。对每一个方程，朱世杰只给书一个根作答案，显然由题意决定。对(1)来说，如果取 $x=16$，依题意就导致罗比绫贵，而这与实际情况矛盾。

另外六个相同或等价的方程为：

$$\begin{cases} x^4-676x^2+57600=0 & x=24 \\ -x^4+676x^2-57600=0 & x=10 \end{cases} \quad \text{(卷中之六，第三题)}$$

$$\begin{cases} x^4-5476x^2+2822400=0 & x=24 \\ -x^4+5476x^2-2822400=0 & x=70 \end{cases} \quad \text{(卷下之三，第六题)}$$

$$\begin{cases} -x^4+34x^3-71x^2-3706x-3600=0 & x=18 \\ x^4-34x^3+71x^2-3706x+3600=0 & x=25 \end{cases} \quad \text{(卷下之五，第一题、第二题)}$$

$$\begin{cases} x^2-34x+120=0 & \text{(卷下之五，第三题)} \\ x^2-34x+120=0 & \text{(卷下之五，第七题)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^4+436x^2-14400=0 & x=20 \quad \text{（卷下之五，第四题）} \\ x^4-436x^2+14400=0 & x=6 \quad \text{（卷下之五，第八题）} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-169x^2+3600=0 & x=25 \quad \text{（卷下之五，第九题）} \\ -x^2+169x^2-3600=0 & x=144 \quad \text{（卷下之五，第十题）} \end{cases}$$

蒋周在《益古集》中求得的根几乎都是小根，对是否有大根合乎题设他没有考虑，因此他是否知道有多个正根尚不能确定。除此之外，宋元数学家在"开方"过程中已经认识到一方程可能有多个正根。但由于他们于列方程，解方程解决实际问题，因此方程的系数，常数项总也脱离不开具体的数字，这样就不可能象汪莱、李锐那样讨论方程的负根、"无数"以及在什么情况下有几个正根，妨碍了他们对方程理论进行深入研究。

二

二次方程可能有两个正根巴比伦人知道得最早。他们在求解二次方程 $x^2-bx+1=0$）（$b>0$）时，相当于求出了 $x_1=\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2-1}$，$x_2=\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b}{2})^2-1}$。当 $x_1>0$，$x_2>0$ 时，巴比伦人认识到它们都是所要求的值[5]。其后，毕达奇拉斯学派在用几何法（比例法，面积贴合）求解二次方程时又前进了一步，他们不仅知道可能有两正根，而且还承认负根[6]。丢番图斯（Diophantus，约公 250 年左右）用代数的方法解二次方程也认识到这一点，但他只接受正根。当二次方程有两个正根时，他往往只给出较大的一个[7]。印度数学家巴斯卡拉（Bhāskara 1114—？）也知道二次方程可以有正、负两个根，在最后给出的答案中，他不取负根。阿拉伯数学家阿尔·花剌子模（Al-khowarizmi 约 780—约 850）曾把二次方程分为三种类型 $x^2=px+q$；$x^2+q=px$；$x^2+px=q$。他在用语言表述的解法中，也知道有两个根，但他仅采用正根。当两个根都大于零时，他取小的作为根[8]。对于三次方程有无多个正根，在卡当（Cardan）之前认识得比较模糊。古希腊马内劳斯（Manelaus）用圆锥曲线求解 $x^3=2a^2$，他只求得一正根。阿尔·海牙姆（Al-khayyāmi 约 1048—约 1131）用几何方法也只解决了一些三次方程，他没有认识到负根，并且往往只求出一个正根[9]。

与国外相比，中算家认识到二次方程可能有不止一个正根比较晚。究其原因主要是在宋代以前中算家考虑的二次方程都是 $x^2+px=q$（$p>0$，$q>0$）型，而这一方程只有一个正根，这样客观上就阻碍了中算家的思想。其次是中算家只注重解决实际问题，对负根很晚才有认识。对于三次方程有无多个正根，中西方认识早、晚在时间上差不多。但由于中算家只对实际问题感兴趣、不关心理论建树，到了 16 世纪欧洲人在方程理论方面已大大前进了。

致谢：本文得到李迪教授，郭世荣讲师、冯世升讲师的帮助，谨志谢忱。

参 考 文 献

〔1〕 李迪：《中国数学史简编》，辽宁人民出版社，1984，313。
〔2〕 中外数学简史编写组：《中国数学简史》，山东教育出版社 1986，424。
〔3〕 钱宝琮："王孝通《缉古算术》第二题、第三题本文辨证"，《钱宝琮科学史论文选集》，科学

出版社，1983；522。
〔4〕 焦循：《汪莱别传》。转引自钱宝琮，“汪莱《衡斋算学》评述”，载《钱宝琮科学史论文选集》。科学出版社，1983；248。
〔5〕〔7〕 M·克莱茵：《古今数学思想》第一册，张理京等译，上海科学技术出版社，1979；18，161。
〔6〕〔9〕 H·伊夫斯：《数学史概论》，欧阳绛译。山西人民出版社，1986；75，227。
〔8〕 日本数学会编：《数学百科辞典》，科学出版社，1984；1337。
〔10〕 徐义保；“对《益古集》的复原与研究”，李迪主编：《数学史研究文集》第一辑，内蒙古大学出版社、九章出版社，1990年8月，第64—73页。

《数书九章》程行相及题意辨析

曲 安 京
（西北大学数学系）

程行相及题是秦九韶《数书九章》大衍类的第七问，历来研究《数书九章》的文章，或触及该问，皆以为原题文意有疑义，秦九韶因此颇受指摘。现将原题书录如下，并就各家共同的疑问作一粗浅分析，以期消除误解，阐明秦氏本意。

“程行相及：问有急足三名，甲日行三百里，乙日行二百五十里，丙日行二百里。先差丙往他处下文字，既两日，又有文字遣乙追付，已半日，复有文字续令甲赶付乙。三人偶不相及，乃同时俱至彼所。先欲知乙果及丙、甲果及乙得日并里；次欲知彼处去此里数各几何。”

“答曰：乙果追及丙，八日，行二千里；甲果追及乙，二日半，行七百五十里；彼处去此，三千里。”

疑问出在“三人偶不相及，乃同时俱至彼所”一语，按字面含义，此句有三解：①三人同时到达；②三人在不同日的同一时刻到达；③三人到达时刻与出发时刻相同。

前两种理解与答案相左，所以历来研究者多倾向于以③为秦九韶本意。

如此一来，本例将成为一余数皆为零的同余式组的求解问题，根本无需动用大衍总数术，直接推算三者日行速之最小公倍数即可。许多人因此批评秦九韶故弄玄虚，认为这是秦氏治学不够严谨的一个表现。

宋景昌《数书九章札记》指出：“馆案云：题意为三行迟疾不同，乙后丙两日，甲后乙半日，问几日几里可以追及。又既及之后，三人不能同行，及各至彼处之时刻，皆与各起程之时刻相同，盖言自此至彼所行皆为整日数也。”

袁向东、李文林〔1〕认为，宋景昌的解释是正确的，并称后一问相当于求解同余式组：

$$N\equiv 0(mod\ 300)\equiv 0(mod\ 250)\equiv 0(mod\ 200)$$

实质上 N＝〔300，250，200〕＝3000。

黄宗宪在《求一术通解》中写道：“原题矛盾已甚，今改之。”他将甲、乙的出发时刻分别改为“丙出发后三天使乙赶丙，乙出发后两天使甲赶乙。”以此附会前面所列三种情况之第①条，使甲、乙、丙三人同时在三千里处相遇。如此大动干戈，实不足取。黄宗宪还对秦九韶此问在大衍类中“无庸杂入均输”提出批评。

沈康身先生说〔3〕：“黄宗宪也理解到此题实在是求三个整数周期的公共周期。”并认为本问“题文、答数都错。”

钱宝琮先生亦主张按前文所述第③条理解题文，他说“问题的这一部分与《张邱建算经》卷上第十二题类型相同，只须求出三个日行里数的最小公倍数，就是‘彼处去此里数’，也不应用大衍求一术来解决。”〔4〕

莫绍揆先生在分析了该问术文的算法意义后指出，使本题相当于一最小公倍数问题，是由于题设数据之巧合使然，“但是，如何订正本问题文使之符合秦氏原意，今尚不知，所以值得继续探讨。”[3]

很明显，如果考虑到秦九韶所拟术文的叙述步骤，则前述三种解释无一能给于题文以完满的疏通。倘断言秦九韶误将求最小公倍数问题忝列大衍类中，恐失之武断。

本文对“三人偶不相及，乃同时俱至彼所”一语，给出另一种理解，并利用术文确证之。

本问分二步求解：首先如术文所示“以均输求之”，先得甲果及乙、乙果及丙所行里数及所需日数；然后，以此为基础，“大衍入之”，列出同余式组求解“彼处去此里数。”

设甲、乙、丙三人日行速分别为 V_1、V_2、V_3，丙先行 t_3 日后，乙出发；乙追丙 t_2 日后，甲起程。按“均输术”可得甲果及乙、乙果及丙时各自所行里数分别为

$$P_2 = t_2 \cdot \frac{V_1V_2}{V_1 - V_2} \quad 里$$

$$P_3 = t_3 \cdot \frac{V_2V_3}{V_2 - V_3} \quad 里$$

按题意：$V_1=300$，$V_2=250$，$V_3=200$，$t_2=2$ 日，$t_3=\frac{1}{2}$日，于是有 $P_2=750$ 里，$P_3=2000$ 里。

故甲追及乙时所行时间为$\frac{P_2}{V_1}=2.5$ 日；乙追及丙时所行时间为$\frac{P_3}{V_2}=8$ 日。这是第一步所得结果。

第二步，以大衍术入之，按术文布算：

问数	$V_1=300$	$V_2=250$	$V_3=200$
定数	$a_1=3$	$a_2=125$	$a_3^*=8$

秦九韶在化问数为定数时，将 a_3 误为 16，关于这一点，文献[1]中有详细、准确的分析，我们所关心的秦九韶设计本问程序是否有误，而不拘泥于个别数据之正误，兹不赘述。以下带星号的数据为改正值。

衍母	$M^*=a_1\cdot a_2\cdot a_3=3000$		
衍数	$M_1^*=1000$	$M_2^*=24$	$M_3=375$
奇数	$g_1^*=1$	$g_2^*=24$	$g_3=7$
乘率	$k_1^*=1$	$k_2^*=99$	$k_3=7$
用数	$T_1^*=1000$	$T_2=2376$	$T_3=2625$

以下求余数的过程为本题的关键。

术　　文	释　　文
“视甲及乙里为乙率，视乙及丙里为丙率。以乙日行满去乙率，不满为乙余。以丙日行满去丙率，不满为丙余。以二余各乘本用，并之，为总，满衍去之，不满为彼去此里。”	$P_2=750$ 里（乙率） $\equiv r_2(\bmod V_2)\equiv 0(\bmod 250)$ $P_3=2000$ 里（丙率） $\equiv r_3(\bmod V_3)\equiv 0(\bmod 200)$ $N^*=r_2T_2+r_3T_3$　（总） $\equiv N(\bmod M)$ $\equiv 0(\bmod 3000)$ ∴彼去此里数为 3000 其中 $r_2=r_3=0$

上述程序表明，程行相及题需要解决的同余式组为

$$N\equiv 0(mod\ V_1)\equiv r_2(mod\ V_2)\equiv r_3(mod\ V_3)$$

其中 r_2 与 r_3 分别称为乙余及丙余，由下式给出：

$$P_2=t_2\cdot\frac{V_1V_2}{V_1-V_2}\equiv r_2(mod\ V_2)$$

$$P_3=t_3\cdot\frac{V_2V_3}{V_2-V_3}\equiv r_3(mod\ V_3)$$

实际上亦相当于求解同余式组：

$$N\equiv 0(mod\ V_1)\equiv P_2(mod\ V_2)\equiv P_3(mod\ V_3)$$

据此，我们就不难对题文中“三人偶不相及，乃同时俱至彼所”一句进行合理而完满的疏解。其具体含义系指：

甲的起止时刻相同，故甲余总为 0；乙抵达终点的时刻与甲追及乙的时刻相同，故乙余亦可为 P_2；丙至彼处的时刻与乙追及丙的时刻相同，故丙余亦可为 P_3。此处所谓“同一时刻”未必意味同一天的同一时刻。

由此可见，本问术文第一步“以均输求之”是设计此题的必要环节，其目的在于导出布列同余式组时所需余数。由于秦九韶给出的例子恰好使余数 $r_2=r_3=0$，加之题文本身措辞隐约，因此蒙蔽了人们的视线，以致许多学者以为秦九韶提出的是一个最小公倍数问题，本文认为这实在是一种误解。

本文是在导师李继闵教授的帮助下完成的，谨致衷心感谢。

参 考 文 献

〔1〕 袁向东、李文林：秦九韶与《数书九章》，北京师范大学出版社，1987，159—179。

〔2〕 莫绍揆：同上，180～203。

〔3〕 沈康身：同上，59～72。

〔4〕 钱宝琮：宋元数学史论文集，科学出版社，1966，60～103。

〔5〕 秦九韶：《数书九章》，商务印书馆，1936，1～53。

关于我国筹算转变为珠算的时代问题

李　培　业
（陕西财经专科学校）

中国、朝鲜、日本等国在历史上都用过筹算，后来均为珠算代替。朝鲜在十七世纪末尚用筹算[1]，日本在十六世纪末，才传入珠算[2]，可见两个国家珠算全面代替筹算的时代在十六世纪以后。日本早于朝鲜，大致说，日本在十七世纪上半纪，朝鲜在十七世纪下半纪。详细考证，尚待学者研讨。

我在这里讨论的是中国珠算全面代替筹算的时代问题。关于此问题，尚未进行深入研讨，一般认为是在程大位(1533--1606)之后。见有下列论述：

1、"《算法统宗》的编成及其广泛流传，标志着由筹算到珠算这一转变的完成。从这时起，珠算就成了主要的计算工具，古代的筹算就逐渐被人遗忘以至失传了。"[3]

2、"当时中国数学在知识分子方面、是兼用筹算和珠算，如吴敬的《九章算法比类大全》、王文素的《算学宝鉴》，都是这样。……《算法统宗》一书，就是完全放弃筹算，统一用珠算的专著。"[4]

对此问题要弄清楚，必须从研究元代整个数学发展的趋势、对元末明初数学书内容的考察、对明初有关珠算史料的分析等三个方面做深入细致的研究，才能得出正确的结论。以下就从这三方面进行一些初步分析，以就正于中算史学者。

一

我国古代的筹算，发展至宋元时代，达到了最高峰。但自元朱世杰后，逐渐趋向衰落。元代筹算的高深部分只在天文历法等科学领域中运用。因为这些方面的繁杂运算，需用多重张位，而算盘则不能胜任。可是，自元郭守敬(1231—1316)后三百年，历法无甚改革，致使筹算的应用退出了这一重要领域。而在日常实用计算，特别是商业计算，多是四则运算，珠算显得极其方便。元正大三年(1310年)王振鹏绘画《乾坤一担图》，在货郎担上插放一把算盘，说明元初商业计算，已广用珠算，珠算已深入民间。一方面筹算的应用领域缩小，另一方面珠算逐渐普及，这就决定了筹算消亡的命运。

我们从元代数学书内容的转变，亦可看出筹算向珠算转变的趋势。朱世杰的《算学启蒙》(1299)虽讲到了天元术，但大部分是解决实用算学问题的。《丁巨算法》(1355年)是"上自九章、下至小法，数十百家，摘取要略。"这里的"小法"就是民间日用算法。从现存部分看，全为日常应用问题。元末算书《算法全能集》、《详明算法》，上卷为算法基本知识，下卷为日常应用题。从元代整个数学书研究的内容看，数学从研究高深问题转变为解决日常应用问题。也就是

数学从少数知识分子的研究走向民间。而珠算是从民间普及开来的，故数学自然与珠算相结合，人们从研究筹算算法而转入珠算算法，也就是说如何把筹算算法改造得能在算盘上实现，这就是元代数学发展的中心问题。可以说元代是筹算逐渐衰落，珠算逐渐盛行的时代。

二

中算史学者认为元代数学书皆为筹算书，明代吴敬、王文素的书也是筹算书[5]，以此作为元代珠算未广泛流行的根据。我以为此问题应进一步深入探讨，要做具体分析，不能只看到数学书中没有算盘介绍或算盘图就断定其为纯粹筹算书。应从以下几点来进行全面分析，然后断定其是否为珠算书，才是比较合理的。

1、从“法、实”置位分析

古代筹算乘、除皆为三重张位。《孙子算经》说：“凡乘之法，重置其位。上下相关，……以上命下，所得之数列于中位。”“凡除之法，与乘正异，乘得在中央，除得在上方。”就是三重张位的记载。至杨辉进行简化，实上变积、商。把古代的三重张位改为二重张位，也没有改为左、右置实、法的一重张位。因为筹算上、下置位，占面积小，也容易定位，且在运算时，手的移动范围小，容易操作。优点很多，无需改为左、右置位。就是迟至17世纪的朝鲜数学《九数略》中，也是上、下置位，就是这个原因。[6]但在算盘上必须左、右置位方可。所以我们可以从上、下置位或左、右置位，就可以分辨出是筹算书或是珠算书。以此来考察元末明初数学书，可以看出：《详明算法》和《九章详注比类算法大全》只列实数，未记明法数位置，故可左、右列，亦可上、下列，珠、筹皆可运用，由此来断定这两本书是珠、筹合用书是较为合理的。但王文素《算学宝鉴》的情况就大不一样。在卷一“认法实，第十二”中，明确指出：“将实列於左上，法列於右下，法实相呼，变实为积是也”。其在“盘中定位数第十二”第一个例题中，又具体指出：“法曰：置所有四十二石於左上为实，以斗价三钱五分於左下为法乘之。”[7]这里“左上”、“右下”中“上”、“下”，不是指筹算中的上、下行，而是指珠算中的左、右位。这在《算法统宗》中解释的很清楚，其“用字凡例”中说：“上：位之左，下：位之右。”“左：上边大位也；右：下边小位也。”就指明是算盘中的左、右位。[8]《算学[illegible]定位诀中的“乘寻根下为法首，除寻法首上为根”中的“上、下”，即指此意。特别是“[illegible]解说极为清楚，其中例题的演算格式全用算盘的演算格式，并非用筹计算，现摘录於下，[illegible]真谛。

“解曰：…其术实当列於右，法当列於左。即於法尾先减一数，从实前乘起…”。

“今有银五两二钱，每两买米三石，问该米几何？

答曰：一十五石六斗。

法曰：置总银五两二钱於右下为实，置每两买三石於左，内去一石，余二石为法。身前因之，合问。”

总的来看，《算学宝鉴》中的法、实皆为左右排列。那么，它是一本珠算书，从法、实置位的角度看是无疑义的了。

2、从定位法的历史发展来分析

《九章算术》、《孙子算经》的乘除法，皆为整数乘除法，若整数下有奇零部分，通常用分数计算。整数乘、除法用三行式计算，其积、商整数位可易於确定，不需特别的定位法。唐中叶以

后，因商业发达而发展了十进小数。[9]进行小数运算，就要牵涉到积、商定位问题。第一次讲到此问题的是杨辉，他提出"法首、法尾定位法，"因是首创阶段，其中尚有错误。[10]至《详明算法》提出"乘除见总"，是后来"悬空定位法"的前身，方法甚为繁琐[11]至吴敬书中始提出后来所谓"盘中定位法"和"掌上定位法"。在王文素的《算学宝鉴》中，上述三法俱备，叙说甚详。三法可筹、珠通用。独"盘中定位"名称，王文素第一次提出，他在歌诀中说："始立盘中定数真，皆从实首起身寻，乘寻根下为法首，除寻法首上为根"。和程大位的"乘从每下得术，归从法前得零"是一致的。这种方法，最适宜于在算盘上定位，故王文素称它为"盘中定位法"。王文素说："窃闻定位有袖中锦者焉，有悬空者焉。所入互逢虽异，所至之域则同。尝读各家定位歌诀，辞论公说不到，事理包收不尽，是故定位不明，数定不真。使学者迷途之人，莫可适向，良可叹也。愚谓定数之要有三，曰法、曰实、曰根，三者缺一，莫能定数。"王氏抓住了定位的"根"(单位)，使定位法变得简单。可见王氏对"盘上定位法"进行了深入的研究，所以他的书是为珠算而写作的。

3、从读数法的发展分析

古代筹算记数，遇空位不置筹。宋元数学书中用筹码记数，则用"○"去占位。但读数时则不读出"零"字。如：

①金文《小盂鼎》："孚人万三千八十一人"。(13081)

②马王堆帛书本《老子》："德三千卌一"。(3041)

③《九章算术·少广》19题："今有积一百八十六万八百六十七尺"。(1860867)

④敦煌千佛洞《算书》："二千一十六人"。(2016)

⑤《数书九章》卷十八"炼金计直"题："共得二百二万八千七百五十贯"(2028750)

⑥《丁巨算法》第四题："得二千六十八个"。(2068)

宋元算书中空位用"○"表示，万一遇到需要读出方可明白时，用"空"或"零"读出。(一般不必读出)。如：

①《数书九章》卷三"缀术推星"题：

"○ ○𝍩𝍠 𝍪𝍢 𝍮𝍤"读作"空度空分十一秒二十三"小分六十五小秒。

度 分 秒 小分 小秒

"○ 𝍪𝍢 𝍱𝍦 "读作"空度二十三分九十七秒"。

度

②《数书九章》卷十二"推知籴数"题："置牵米四石六斗八合於实数零文之下，为立方从隅"。

后来在读数时出现"零"字，仅用於表示零头，并不表示空位。如：

①《丁巨算法》第五题："得二千零二个"。(2002)

②《算法全能集》第五页："该秒四百零三两"。(403)

但是，《详明算法》(元末)中凡遇有空位，读数时皆加上了"○"字。当然此时已把"○"读为"零"。如：

①今有绢四十四万○七百九十一尺。(440791) (25页)

②得一十二万○○五十。(120050) (33页)

③并五位数共九十万○一千四百四十为法。(901440) (34页)

最引人注目的是《算学宝鉴》(1524)中的表示空位，既有用"〇"、又有用"零"，显然，在读数时一定要读出"零"字。如：

①"乘法二十四"："答曰：六千六百零四石九斗三升七合七勺三抄"。

"法曰：……得六千六百〇四石九斗三升七合七勺三抄"。

②"乘法二十四"："答曰：三百万〇〇七千九百八十六贯八百四十文。"

③"乘法二十四"："直田长四万五千六百七十八步，阔三千〇〇六步。问该积步几何？答曰：一亿三千七百三十万零八千零六十八步"。

④"因代繁乘第三十六"："答曰：一千零八十二石零九升二合五勺八抄"。

李约瑟认为最早用"零"字的书是《算法统宗》，考证不确。至迟《算学宝鉴》中就已用"零"字表示空位。李约瑟说："要解释为什么到了明代会用起零字来，是有一些困难的"。[12]李继闵认为："零字的使用，可能与珠算的使用有关。珠算代替筹算，运算速度大大加快，边念数字边拨珠，念毕拨完。若遇1001，念作"一千一"，则拨完千位的"一"后，下一个"一"很易拨在百位上；改念"一千零零一"，提醒中间有两个空位，可使拨珠迅速准确"。[13]这是很有道理的，我完全同意这个看法。以此从读数法的发展来考察，《详明算法》已适宜于珠算用书，而《算学宝鉴》则完全是一本珠算书了。

但是，《九章比类算法大全》完全沿用旧的读数法，未用"零"字，这又如何解释？我认为吴敬著书是以杨辉的《详解九章算法》为蓝本，受古书影响，而未加改动，是可以理解的。

顺便探讨一下《算法全能集》的时代问题，一般认为它和《详明算法》有相同内容，而认为是同时代的。我认为它的出版年代应比《详明算法》早，大致和《丁巨算法》(1355年)同时代。这可提出以下几点证据：

①《详明算法》的歌诀更接近于《算法统宗》，有的完全相同。而《算法全能集》的歌诀差异较大，且不如《详明算法》简明。

②《算法全能集》中置数，往往写着"置……在地"的话，与《丁巨算法》中相同，这是指筹算的置数。

③《算法全能集》中尚未用"零"字表示空位，说明它的时代较早。

4、从运算口诀的发展来分析

乘法九九口诀，远在春秋战国时都已产生，九归口诀在南宋杨辉的著作中才开始出现。朱世杰《算学启蒙》中的九归口诀，已接近於现代口诀。乘除口诀虽皆起源于筹算，但也不否认在南宋时有可能用于珠算。至於加减口诀，则纯为珠算所设。吴敬《九章算法比类大全》中才第一次出现，王文素《算学宝鉴》亦有相同记载。其加法口诀为[14]：

"因加乘法起例：

起五诀	一起四作五	二起三作五	三起二作五	四起一作五
成十诀	一起九成十	二起八成十	三起七成十	四起六成十
	五起五成十	六起四成十	七起三成十	八起二成十
	九起一成十"			

其减法口诀为：

"归减除法起例：

破五诀	无一去五下还四	无二去五下还三

无三去五下还二　无四去五下还一

破十诀　无一破十下还九　无二破十下还八　无三破十下还七

无四破十下还六　无五破十下还五　无六破十下还四

无七破十下还三　无八破十下还二　无九破十下还一"

所谓"起例"就是口诀，扬辉《习算纲目》云："诸家算书，用度不出乘、除、开方三法，起例不出如、十二字，下算不出横、直二位"。即此意。

考察这两类口诀，皆为珠算口诀。因为减法口诀中的"无一去五下还四"，只能适用于珠算。筹算因有"五不单张"的规定，在减法运算中不会出现"无一"的情况，只有在珠算中表示"5"用上一珠，"5－1"时才会发生"无一"。那么，这些口诀专为珠算而设是无疑义的。再者，筹算在它发展的最高峰时未出现加、减口诀，在它快要灭亡时才出现加、减口诀也是说不通的。故加减法口诀的出现，标志着珠算已进入成熟阶段。吴敬、王文素的书是为珠算而创作的。

通过以上四方面的分析，我们得出一个共同的结论，就是王文素的《算学宝鉴》是一本珠算书。关于这个结论，我们还可以从原书中找到证据。

"众九相乘"中说："众九相乘，用子甚多，算盘子少，乘则不便，既乘已毕，只动一子居下，余仍如故，视之久矣，忽得此法"。

"九百九十九人，每人勤粟九石九斗九升九合，问该总几何？

法曰：置每人九石九斗九升九合为实，於第三位起一，那於尾后第三位即得"。

$$\begin{array}{l} 9999 \\ \underline{-100 \quad +1} \\ 998900\ 1 \end{array}$$

这是王文素特地为算盘上进行简捷运算而想出的一种方法。是为了解决算盘子少、乘则不便而提出的，而且经过长时间观察才发现的。由此可知，王文素深研珠算，他为珠算的发展做出了贡献。可以说《算学宝鉴》是我国现存的第一本珠算书。

三

元代是筹、珠并存的时代，明初筹算仍然存在。那么何时珠算完全代替了筹算？从下面的历史实事中，可以得出结论，这个转变完成于15世纪下半纪。

1、《鲁班木经》中有制造算盘的规格规定，可见此时已广造算盘了。此书写於永乐末年(1425年)之后，大概在15世纪下半纪。

2、王文素是商人家庭出身，精于珠算，其所著《算学宝鉴》虽自序于嘉靖三年(公元1524年)，然其攻算学三十多年，故知在其年轻时，商业界已不用筹算而改用珠算了。

3、唐顺之(1507—1560)为明代数学家，官至右都御史，精於珠算[15]。但不知天元术。一个精於数学的上层知识分子，计算时用算盘，而对筹算的天元术已全然无知，可见，其时筹算已经失传了。那末筹算的消亡在15世纪是可信的。

4、沈榜《宛署杂记》(1593年)中记载万历十九年(1591)乡试用品中有龙门拐子算盘十二

面，万历二十年(1592)会试用品中有算盘六面，万历十七年武乡试，万历十八年武会试时用算盘八面。这时朝野上下皆用算盘，筹算早已失传了。

5、朱载　(1536—1611)是明代杰出的科学家。他为了研究乐律，用算盘进行开方计算。可见，此时在一切领域内皆用算盘这个计算工具了。

由以上史实，可以证明15世纪下半纪，我国已经完成了筹算向珠算的转变。16世纪则是算盘扩大应用领域，是进一步发展的时代。因此，我们认为在程大位之前珠算已全面代替了筹算。程大位的《算法统宗》对珠算的普及起了巨大的作用，说它的广泛流传才使珠算全面代替了筹算，恐不符合历史实际。

参考文献

〔1〕〔6〕　朝鲜刊本　崔锡鼎：《九数略》。
〔2〕　铃木久男：算盘传入日本的时期和《魁本对相四言杂字》。
〔3〕　李俨、杜石然：《中国古代数学简史》。
〔4〕　李约瑟：《中国科学技术史》第三卷。
〔5〕　钱宝琮：《中国数学史》科学出版社，1981。
〔7〕　王文素：《古今算学宝鉴》，清抄本北京图书馆藏。
〔8〕　程大位：《算法统宗》。
〔9〕　梅荣照：唐中期到元末的实用算术，《宋元数学史论文集》，科学出版社，1966。
〔10〕　杨辉：《杨辉算法》，宜稼堂丛书本。
〔11〕　李培业：《详明算法·乘除见总》诠释，算史汇稿第一集。
〔12〕　李约瑟：同〔4〕。
〔13〕　李继闵：十进位置制记载与筹算起源初探。
〔14〕　吴敬：《九章详注比类算法大全》。
〔15〕　李迪：《中国数学史简编》，辽宁人民出版社，1984。

新发现的史料《一鸿算法》简述

李 迪 王荣彬
（内蒙古师范大学科学史研究所）

几十年前李俨先生（1892—1963）在其著作中记有"《一鸿算法》口卷，万历十二年（1584）余楷撰"[1]，资料来源是《算法统宗》。《算法统宗》卷十二"算学源流"中载50种算学书的目录，其中有《一鸿算法》一书，为"《一鸿算法》，万历甲申银邑余楷作"，没有卷数。"万历甲申"就是明万历十二年（1584）、"银邑"是湖北通城县治的别称[2]，而余楷其人在历史上则没有任何记载。在人们的印象中，这部明代的算书早已失传。最近一个偶然的机会，得知这部书尚存安徽徽州博物馆（现为黄山市博物馆）。本文作者之一利用暑假回家之机，前去该馆查阅此书，受到热情接待，并且找到了这部四百多年前的明代算书。现就记忆所及和简单的笔记，把《一鸿算法》作一简单介绍。

《一鸿算法》四卷，刊本四册，有残缺。全称是《新刻一鸿简捷便览算法》，《一鸿算法》乃是其简称。卷一开头缺封面、封里、序、目录和正文的前三叶，第四叶右下角亦烂。因每卷在中缝中独立的叶数，故知缺前三页。中缝上刻卷数、中刻书名，下刻页数。（如右为卷四第十一页的中缝所示）第一卷的末尾为单面，显然有残缺。第二、三两卷开头有相同的书名全称，而第四卷却为"斤求两法卷之四"，而中缝仍刻《一鸿算法》。全书没有发现撰著者署名，估计是署在卷一开头或者在自序之末尾。

□卷之四【一鸿算法】【十一】□

版面的大小为长24.5厘米、宽14厘米，版心为长17.5厘米、宽为11.5厘米。每面10行，每行23字，一叶10×23×2＝460字。后二卷之末叶均在中缝刻有如下页所示那样的图案，以示卷终。卷一和卷二都没有这种图案。卷三的末页最后刻有

万历甲申冬月明雅堂梓
新刻一鸿简捷便览算法三卷终

而卷四则有如下二行

万历乙酉岁春月明雅堂绣梓
一鸿算法四卷终

根据上面的文字，后两卷不是同一年刻成，卷三为万历十二年冬月，公历应为1585年初，卷四为万历十三年春，即公历1585年初夏，实为同一年，中国农历为两年。卷一和卷二之末部未刻年月，估计都是刻于万历十二年，即前三卷都刻于"万历甲申"。

从文字书法来看，前二卷相同，第三卷的前半为另一种字体，后一半和第四卷相同，但

与前面的两种字体都不一样。显然是由三位刻版工匠刻的。

在书最末的空白处，用毛笔书有"万历年乙酉岁冬月金冬九立"十二字，还有手写毛笔字："如今金远达用"六个字。二者字体一样，应是一人所写。我们推测：本书出版后，同年冬有个叫金冬久的人买了一部，并且写上买书的年月和签名。冬九可能是字，远达是名，即姓金名远达字冬九。对这位购书人的情况，同样不了解。看来金远达得到这部书还比较得意。

通观全书的总水平是不高的，和明代后期的其他数学著作相比，有某些相似之处，主要是一部讲珠算的书，有口诀，但奇怪的是没有一幅算盘图，很可能在卷一前三页上有图而散佚了。为了使读者能了解个大概情况，我们把从内文中找出来的小标题列下：

卷一

上法初学用(缺)　加法　除法　九九合数　九归歌　定位歌　分法实歌

认物位歌　因法歌　隔位加法　乘法歌　隔位乘法　归法歌　隔位减法

隔位归除　商除歌　通分歌　衰分歌　总论歌

卷二

丈量田地歌　制绳　制车　丈田总歌　方类诀歌(异形同法　方类杂形)

圆田类诀　圆类弯歌　开平方法认商歌　量分厘基用法次序歌

抽路分基歌　抽曲折路法　对换基法歌　圭田截积歌　环田截积歌

卷三

开平圆方歌　立方认商歌　求测高深　求测高远歌　垛积　狮子滚球法

金蝉脱壳　断人生死歌诀　算孕妇生男女法

卷四无这类小标题，全是斤两换算。前三卷除了歌诀外，数学题占了很大部分，共有108道题，卷一有49道，卷二有23道，卷三有36道。每题下都是"答曰"和"法曰"，题的开头大都有"今有"两字，仅有两题例外。数学题大体都是列于歌诀之后，是歌诀的例题。因此许多歌诀带有计算法则的性质，歌诀一般合韻角，例如卷三"开平圆方歌"：

平圆之法若求周，十二乘积数可求，

求径四因三取一，开平方法以除收。

但是有些歌诀很不好理解，不过这四句很好理解，第二句是已知圆面积求周长，在传统数学中有相当于下面的公式

$$\text{圆面积} = \frac{1}{2}\text{圆周长}^2$$

反求圆周长就是"十二乘积"：12×圆面积等于圆周长的平方。第三句是已知圆面积求直径，在传统数学中有相当于下面的公式

$$\text{圆面积} = \frac{3}{4}\text{直径}^2$$

反求直径就是"四因三取一"：$\frac{4}{3}$圆周长等于直径的平方。这样，两次都是只得到所求数的平方，需要再开平方才行，这就是第四句"开平方法以除收"。第一句是说求直径和求圆周长步

骤一样，所谓“平圆之法”即求圆的直径。值得注意的是，绝大部分歌诀与其稍早的算书《盘珠算法》(1572)和《数学通轨》(1578)所载除“九归”等外，几乎都不相同。如《盘珠算法》卷二“算丈量田法”有诗、田形诗和法诀三部分诗歌，“田形诗”又称“田形歌诀”，因此当时诗与歌诀没有区别。《盘珠算法》中这些诗歌如下：

诗　曰

古者量田较阔长，全凭绳尺以牵量，
二形虽有一般体，惟有方田法易详。
若见蜗斜并四曲，直锥裨补取其方，
却将乘实为田积，二四除之亩法强。

田形诗(田形歌诀)

只因乘之法亩明，直长与阔两相乘，
圭梭一折乘为积，勾股半梭依倜乘。
勾股勾难通方折，量弦往作半梭形，
弧矢弦弓加入阔，折半再以阔相乘。
梯斜田形两头并，南北东西并折乘，
圆周自乘十二约，径自乘来七五乘。
行周半乘乘为的，周径相乘四一停，
丈量惟有十六句，更移法例通诸形。
抹角通乘方正积，再乘抹角折半平，
缺如方角乘无折，幞头曲尺两田营。
水① 塘钱形乘通积，再乘裹步减余盈，
环辋鞶朋周湾折，径相乘之积数乘。
鼓领一头入中阔，折半乘中步数明，
三广倍中加二阔，四而为一又长乘。

法　诀

娥眉牛角无真数，更为弧矢勾梭评，
以上诸形为法便，要从规矩折从横。
倍加零尺为分数，丈尺并之步数成，
详细丈尺乘为步，壬梭弧弓亦同明。
势多搞斜四不等，予裁捷法更调停，
四周绳直磁塍界，科量中径如梭评。
径如一隅难方折，是为一方两片边，
方昌内外央圆角，半梭弧矢截量成。
一昼五同三尺古，业擅专门的数明。[8]

① “水”原文误为“火”，以意改正。

《一鸿算法》卷二有一标题为"度之章"，主要是讲述田亩丈量的，有歌诀多首。不仅歌词与前述《盘珠算法》的不同，而且是一首一首的分开，每首都独立表达某一思想或一类图形面积计算的法则，歌诀后面是一些说明或例题，现分录于下：

丈量田地歌

仁君悯下苦虚粮，率土之滨产概量，
行者若能皆体上，西周又是乐陶唐。①

丈易步难(歌)

量田丈线捷而功，何必区区执步弓，
师古不　规矩外，事能简易则民从。

丈田总歌

田形无数尽难详，尺用方圆作纪纲，
遇有凹尖斜曲处，就中裨补取其方。
如田中画量其十，横直相乘得积良，
方圆六归图用八，全凭目力空中央。

方类歌诀

四不等全方类诀，十量中替并而折，
斜梯箕直与圭璋，轮扇　牙同简捷。

异形同法(歌)

半圭形体与勾股，十字直傍横半数，
梭榄琚皆并两圭，三广鼓船二梯补。

方类杂形(歌)

抹角幞头积曲尺，直斜相并斯为的，
磬兼箭簪翎田　，② 二斜相并无惑疑。

圆田类诀

圆形用十不量周，免得因归定去留，
横直相乘归用八，时师自可细推求。

还有"圭田截积歌"、"环田截积歌"等就不再引述了。

全书的内容根据前引之小标题可知其大概，现在简单归纳一下，以见全貌。

卷一主要讲珠算法及算例，尽管没有算盘图，但根据文字来看是毫无疑义的。在这卷中也见到传统的筹码，是为了记录数字，而不是计算。如二归的例题，就有如下面的筹码记数。

卷二主要是面积计算，已如上述。此外，本卷之末还有开平方法。

卷三的内容较杂，包括少量的体积问题、开立方、测量、"方程"、垛积以及一些杂题，没有一个较为统一的思想或观点。

---

① 本句缺一字，现补一"是"字。

② 本句少最末一字。

卷四的内容就如卷名“斤求两法”那样，全是斤两换算，即钱物换算比率，这里的两是指当时货币银的重量，其中也包括斗升数与银子数的换算比率。从内容、刊刻年代和字体来看，这一卷有可能是后加的，但仍叫《一鸿算法》。总之，多少有点特殊性，尚需进一步研究。

(法)	(实)	(实)	(实)	(实)	○
二	一	二	四	六	八
分	百	十	两	钱	分
𝍪	𝍩	𝍪	𝍬	𝍮	𝍰

全书内容比较浅显，可能是为初学者编写的入门书，与当时其他算书的水平相近。有人说“其书颇为精密”[3]，没有根据。《一鸿算法》一书的资料来源大体有二，其一是参考了前人的有关著作，尽管未提出一个书名(也许在书的序中提到)，可是根据内容便可对照出来。其二是当时社会上行用的某些与数学有关的技术，如土地丈量法等。作者余楷本人又在此基础上，多少有些自己的创作，如新偏歌诀等等。

关于此书的情况，人们过去知之甚少，还有错记，如根据《算法统宗》未记卷数，有人认为就是一卷[4,5]。由于该书的发现，得到纠正。《一鸿算法》的存在，使明代数学史研究和珠算史研究都增加了新的资料。

我们在查阅此书时，得到黄山市博物馆的领导和有关人员的热情帮助。安徽师大的胡炳生先生也曾对此事给予了支持。在此谨至谢意。

参 考 文 献

〔1〕 李俨:《中算史论丛》第二集，1954，中国科学院出版，第96页。
〔2〕 臧励龢等编:《地名大辞典》，1982，商务印书馆香港分馆重印，第1134页。
〔3〕 (日)儿玉明人编《十六世纪末明刊の珠算书》，1960，(日本)富士短期大学出版部，第12页。
〔4〕 丁福保、周云清:《四部总录算法编》，1957，商务印书馆，八六页。
〔5〕 (清)黄锺骏:《畴人传四编》卷6“余楷”。

关于《算法纂要》的研究

李　培　业
（陕西财经专科学校）

明代著名数学家程大位（1533—1606）在出版了他的名著《算法统宗》（1592年）后六年，又编辑《算法纂要》（1598）一书刊行。明末，曾有书坊翻刻此书，入清以后，大概是由于在序言中有“北虏充斥于边陲”语，为避讳免祸，无人再敢翻刻。公私书目，亦未记载。因其流传极少，故研究者亦不多见，仅李俨先生作过介绍，[1]我于《算法纂要校释》的说明中作了初步研究。[2]现对其编纂目的、与《算法统宗》关系以及在数学史上的地位，作进一步研究。错误之处，尚请大家指正。

一

首先，我们探讨一下程大位编纂此书的目的。

程大位编辑此书的目的有下面三个方面：

（1）为了便於初学者：程大位于万历二十年（1592年）刊行《算法统宗》后，感到其内容庞杂，卷帙浩繁，初学者尚不便使用，故将《统宗》删其繁芜，揭其要领，编成此书。这点吴继绶在《算法纂要》序言中开宗明义即已指出：“汝思业已辑算法统宗矣，该而博、辨而章，犹惧承学者之艰于竟也，复辑此纂要焉。”就是说初学者难以学完《统宗》，才编辑《纂要》的。程大位自己在《纂要》的结尾语中也说得明白：“是集（指《算法纂要》）以纂要名，但只纂其切要，便於初学，若九章杂问，详见统宗，兹不具载。”说明编辑此书是为了便於初学，若要进一步深造，就要学习《统宗》了。

（2）为使珠算广为应用：《算法统宗》包括了当时的各种数学知识，珠算只是做为计算工具来介绍的。全书共十七卷，介绍珠算的只有两卷，仅占一小部分。但是，当时广大群众，特别是商业人员，并不一定要求掌握高深的数学知识，比如方程、勾股之类。而最需要的是将珠算学到手，以便日常应用。所以编辑一部以珠算为主，附以应用数学知识，简明扼要的算法书是非常需要的。程大位编辑《纂要》的目的就是满足这方面的需要，我们从他选择的内容就可看出这一点。《纂要》共四卷，论珠算的就有两卷多。特别是从第四卷的内容分析，可以看出程大位有意突出了珠算。第四卷摘自《统宗》杂法一章，删去“铺地锦”、“河图算”等，而介绍“一笔锦”、“一掌金”、“袖中定位”各法。这是因为此三种皆与珠算有关。“一笔锦”是珠算的笔算式，当一时没有算盘可用时，可用此种笔算进行演算。而其演算过程与珠算无异，这是珠、笔结合。“一掌金”系一种指算，原《统宗》无例题，此处加一累加算题，并补充说道：“但惯熟归除者，暗记法则，乘除照依盘式，理甚易明。”这是把珠算用于指算，是珠、指结合。“袖中定位”

是一种在手指上进行乘除定位的方法。书中写道："凡用算盘已毕，以手指掐定位。"可见，还是为了解决珠算定位问题的。程氏在《纂要》中未介绍盘中定位法，是一缺陷，他是否以此来进行补救，亦未可知。总之，程大位是以珠算为主编辑此书的，目的就是很快地使珠算得到广泛的应用。

（3）为了抵制坊间刻本错误的不良影响：程大位在《算法纂要·识语》中说："万历壬辰，余编算法统宗四本，……明年癸巳，书坊射利，将版翻刻。图象字义均讹，至误后学"。程大位看到这种"致误后学"的情况，甚为愤慨，一方面声明"买者须从本铺原版，方不差谬"，以免上当外，另一方面便采取积极措施，就是编辑是书出版，以抵制坊间刻本的不良影响。这个目的，在程时用的序和范时春的跋中均有所述。程时用说："坊间翻刻诸本（指《统宗》翻刻本），讹舛相乘，豕鱼莫辨，并其津筏而亦失之耶。族子汝思深为此虑，遂于化日之暇，将统宗算法中、删其繁芜，揭其要领，……厘为四卷，题曰算法纂要。"程大位看到坊间刻本错误严重，深深感到忧虑才编《纂要》的。范时春说："万历壬辰业已编辑算法统宗，用布海内，一时纸价腾贵，坊间市利，竟相翻刻，豕鱼舛错，玉石混淆，观者甚为惜之。今年戊戌，宾渠氏复就统宗中去繁摘要，正讹黜谬，编为纂要四卷，付之剞劂。"程大位自己不但深为忧虑，就是人们看到这种情况，也甚为可惜，所以程大位才下决心再编一部简明本，起到"正讹黜谬"的作用。

二

其次，我们来研究一下《算法纂要》与《算法统宗》的关系。

我们先把《算法纂要》中所选条目，与《算法统宗》中相应条目的内容作一比较，列成下表：

序号	条目名称	与《统宗》关系	在《统宗》何章
1	先贤格言	与《统宗》全同 （以下简记"全同"）	总论 （卷一、二）
2	算法提纲	自《统宗》内摘录 （以下简记"摘录"）	〃 〃
3	算学节要	摘录	〃 〃
4	数名释义	采自吴敬书，《统宗》无此项。	〃 〃
5	乘除用字释	由《统宗》内"用字凡例" "乘除用字释"两项摘录	〃 〃
6	数、暗马式	全同	〃 〃
7	大数	节录到"万"为止，《统宗》尚有亿以上二十二个名称。	〃 〃
8	小数	节录到"沙"为止，《统宗》尚有"尘"以下十一个名称。	〃 〃
9	度	全同	〃 〃

序号	条 目 名 称	与《统宗》关系	在《统宗》何章
10	量	全　　同	〃　〃
11	衡	全　　同	总　论
12	亩	全　　同	〃　〃
13	诸物轻重数	全　　同	总　论
14	定算盘位次	〃　〃	〃　〃
15	九九便蒙	〃　〃	〃　〃
16	九因歌	〃　〃	〃　〃
17	九归歌	〃　〃	〃　〃
18	因乘论	〃　〃	〃　〃
19	九归归除论	摘录、缺少定位及约分论述	〃　〃
20	加法论	全　　同	〃　〃
21	减法论	〃　〃	〃　〃
22	商除论	〃　〃	〃　〃
23	定法实诀	〃　〃	〃　〃
24	归除法实假如	增加一条，余全同	〃　〃
25	总诀	全　　同	〃　〃
	以上为第一卷		
26	初学盘式	全　　同	总　论
27	九归	歌诀同、例不同	〃　〃
28	九因	〃　〃	〃　〃
29	归除	〃　〃	〃　〃
30	乘法	〃　〃	〃　〃
31	加法	摘录，少两则例题	〃　〃
32	减法	〃　〃	〃　〃
33	商除	全　　同	〃　〃
34	异乘同除	增　两　题	〃　〃
35	约分	摘录，少两则例题	〃　〃
36	通分	摘录，少四则例题	〃　〃
37	差分	全　　同	〃　〃
38	贵贱差分	摘录，少二题	衰分章(卷五)
39	就物抽分	〃　〃	粟米章(卷四)

序号	条目名称	与《统宗》关系	在《统宗》何章
40	倾煎论色	全同	总论
41	衡法斤秤歌	摘录，少十二题	粟布章
42	挑土计方	全同	商功章(卷七)
43	堆砖	系商功章内一题	商功章(卷七)
44	物不知总	歌诀同，例题不同	衰分章
45	束法	摘录，少三题	少广章(卷六)
46	盘量仓窖	摘录，少六题	粟布章
47	盐堆量法	全同	〃〃
48	堆垛	摘录，少三题	商功
	以上为第二卷		
49	丈量田地	摘录，删去总歌	方田章(卷三)
50	新制步车图式	全同	〃〃
51	方圆定则九图	全同	〃〃
52	各形用法	摘录，少十一题	〃〃
53	各形截变	全同	〃〃
54	句股等形演段	全同	〃〃
55	分田截积	只录“直田截积”	〃〃
56	休宁县科则	全同	方田章
57	亩法论	〃〃	〃〃
58	古今折步法	〃〃	〃〃
	以上为第三卷		
59	一笔锦	全同	杂法(第十七卷)
60	一掌金	增加一题	〃〃
61	袖中定位	全同	〃〃
62	孕推男女	全同	〃〃
63	僧分馒头	摘自“难题”	难题
64	周天同里	全同	杂法
	以上为第四卷		

通过上表可以看出，全书共六十四个条目，其中与《统宗》全同的有三十四条，摘自《统宗》的有二十二条，增加了例题的有三条，采自他书的有五条。百分之九十以上的内容是取自《统宗》的。

对摘录的条目进行分析，可得以下三种情况：

(1)为了全书统一，删去有些诗词中与本书无涉部分。如"算法提纲"内删去"三要知加减定位"及"五要知诸分母子,…"，因这些项目在《纂要》中已不复存在，故删去。"算学节要"一项亦是如此。

(2)为初学者着想，删去繁难部分。如九归归除论中删去"定位"及"约分"部分；"加法"、"减法"、"约分"、"贵贱差分"、"就物抽分"、"衡法斤秤"、"盘仓量法"、"堆垛"、"各形用法"等条目都减少了例题，删去了一些较难的题。特别是"各形用法"中例题，原有二十六题，现只选十五题，删去"覆月田"、"梭田"、"眉田"、"榄形田"及有关直田的各种杂题。对剩下的题，次序有所调整，由简单到复杂，循次渐进，对初学有益。"盘量仓窖"条目中删去的"船仓量法"及"芦席围囤"数题，都是比较复杂的。

(3)为实用目的，删去不切日用的部分。如"大数"、"小数"内删去其不常用单位，并注明："亿之上，虽有名而无用也。""凡小数尘之外，虽有名而无实，公私之不用也。""束法"中仅选取求总数三题，删去求周数三题，因为实用中求总数的问题居多。

《纂要》除采自《统宗》者外，也增加了少量内容。一种是新增条目，如"数名释义"，《统宗》所无，由吴敬书中选入；一种是增加一些例题，如："异乘同除"条增加两题，乘法题内增加了"五个山头五只虎"的趣味题，"物不知总"中增加两题，"一掌金"中增加一题。这些都是为初学者着想，易於掌握所学内容。特别要指出的是"九归、九因"、"归除、留头乘"设题全与《统宗》不同，次序亦相反。从设题上看，《统宗》的九归和九因，归除和乘法各设一套题，而《纂要》只设一套题，数量减少一半，更体现乘、除互为还原之意。

若从全书选材看，《统宗》共有条目 290 个(包括 108 个难题)，《纂要》只取录 59 条，只占全书的百分之二十多。其中总论部分(基本算法)原书 57 条，选取 38 条；方田章原书 12 条，选取 10 条，这两部分所选最多。其余粟米章选 3 条，衰分章选 2 条，商功章选 3 条，少广章选 1 条，都是极少数。盈朒、方程、勾股各章，未选一题。从这里可以看出《纂要》是偏重於基本算法介绍及为解决日常计算问题而编写的。

三

最后，探讨一下《算法纂要》在历史上的地位和作用。

我们先分析一下《算法纂要》的继承性问题。程大位在编《算法纂要》时，并非只做《统宗》的摘编工作，而是以《详明算法》为蓝本进行选材，是继承了《详明算法》这一类型算书的优良风格的。这可以从以下几方面得到证明：(1)条目多数与《详明算法》相同。《详明算法》共二十七个条目，《算法纂要》就有二十二个和它相同。仅"乘除见总"、"求一"、"端疋"等少数条目，为《纂要》所无。(2)诗词多与《详明算法》相同。《详明算法》有诗词十九首，其中十四首与《纂要》相同。(3)有些例题与《详明算法》相同。我们查出"九归"设题未采用《统宗》题，而与《详明算法》相同。另外"加法"、"商除"、"异乘同除"、"约分"、"斤秤"、"堆垛"中各题，有的与《详明算法》相同。

现在我们进一步研究《纂要》这种类型的算法书在历史上所起的作用。

从杨辉以后，实用算书大致分成两大类型。一种是以"九章"问题分类，沿用《九章算术》

格式，综合各种数学知识，由基本算法到高深部分，样样俱备，能体现出当时数学水平。这种类型的书有杨辉的《九章详注算法》，吴敬的《九章比类大全》、程大位的《算法统宗》等。另一种是以日常应用的问题分类，内容较少，适宜初学。这种类型的有杨辉《日用算法》、贾亨《算法全能集》、何平子《详明算法》等。我们把前者简称"九章型"，后者简称"日用型"，《算法纂要》即属于"日用型"。

"日用型"算书除基本算法外，大多包括以下项目：

异乘同除，就物抽分，差分，贵贱差分，斤秤问题，堆垛，盘量仓库、丈量田亩、土方计算。

这种"日用型"算书，在程大位后，出现甚多。如：

(1) 黄龙吟：《算法指南》两卷(1604)

(2) 蒋守诚：《算法全书》四卷(1675)

(3) 王 相：《指明算法》二卷(约1684)

(4) 《算法指掌》五卷

(5) 沈士桂：《简捷易明算法》四卷(1707)

(6) 刘虬江：《算法大全》两卷(1714)

(7) 陈鹤龄：《算法正宗》四卷(1756)

(8) 程大年：《增补算法正宗大全》八卷(1800)

(9) 《增补详明算法大全》一卷(未记年月)

(10) 吴兆珍：《算法指掌大全》四卷(1818)

(11) 状元阁印《算法大全》一卷(1895)

(12) 《新算法大成》四册(1909)

这种类型的算书，除刻本外，民间流传抄本甚多。如上述状元阁印《算法大全》序言中说："甲午仲秋，於友人案次偶见藏书中抄本算法大全一册，阅其语句清爽，与他本不同，……缮写覆校而付梨枣。"李迪先生藏有抄本算书：(1)《算法纂要》(1801年抄，与程氏《纂要》不同)，(2)《田子泉算法》两册(未记抄写年月)亦属"日用型"算书。

"日用型"算书在民间普及珠算及初等数学知识方面，起到了重要的作用。由于它的内容少、日用性强，以讲述珠算为主，因而易於为广大群众所乐于接受，便於在民间广为流传。所以，这种类型的算书，实际上成为明、清时代广大群众的数学启蒙读物。《算法纂要》虽因某种原因流传不广(上述蒋守诚《算法全书》内引用了《算法纂要》)，但它的编辑目的及内容，仍然继承了下来，因多种同类著作的出版，发展了这一编排体系。从这种意义上说，仍然起到了应有的作用。

参 考 文 献

〔1〕 李俨：《算法纂要》介绍，《安徽史学》1960年2月总第1号。

〔2〕 李培业：《算法纂要校释》，安徽教育出版社，1986。

李光地对梅文鼎学术研究的支持与促进

郭 世 荣
（内蒙古师范大学科学史研究所）

科学研究需要一定的条件，良好的环境和物质基础是促进学术进步的一个因素。在不同时代和不同国家，科学家从事科研活动的情况也不同。有的人在研究机构或学校中钻研科学，条件较好；有的人则是单枪匹马，靠个人奋斗。我国清代的科学家大多数是民间的独立工作者，没有学会等团体，个人喜好和兴趣是使他们献身科学的重要因素。因而，科学家之间的交流主要是通过师生关系、亲友关系、同乡、家族内部等渠道来实现的。

清初著名的天文学家、数学家梅文鼎(1633—1721)在科学研究上取得了很大的成就[1]，他的学术活动得到了许多师友的支持和帮助，其中以李光地为最，梅李二人的关系引人注目。身为清朝高官的李光地对平民科学家梅文鼎优礼有加，把他推荐给对科学知识有浓厚兴趣的康熙皇帝，不仅在学术界，而且在社会上产生了很大的影响，是梅氏生平中的重大事件。李光地积极支持梅氏的学术研究，从多方面提供帮助，并大力宣传他的学术成就。因此，在研究梅文鼎时，李光地也是值得注意的历史人物。

李光地，字晋卿，号厚庵，1642 年生于福建安溪，比梅文鼎小九岁。他于康熙九年(1670)中进士，被选为庶吉士，又为编修，后担任过内阁学士、翰林院掌院学士、兵部侍郎、顺天学政、工部侍郎、直隶巡抚、吏部尚书和文渊阁大学士等职。1718 年，李光地卒于北京，年七十七，谥号"文贞"，1722 年，雍正帝又赠太子太傅[2]。在学术上，李光地主要治程朱理学，是当时的著名学者，曾奉命主编《朱子大全》、《周易折中》、《性理精义》诸书，自著有《榕村全集》、《榕村语录》等，有《榕村日记》流传至今。他早年受家庭影响，学习过天文历算，但在天算方面的工作不多，所著有"记四分术"、"记浑仪"、"记太初历"、"记星书"等短文[3]。另有《历象本要》一书，曾多次印刷，收入《李文贞公全书》之中，但北图藏有康熙刊本一卷，称杨文言著，李、杨二人存在作者之争，乾隆乙未(1775)春盛百二所写跋文暗示了这一点。事实上，此书可能是在李光地初稿基础上由杨文言修改完成的。李光地于 1711 年给梅文鼎的信中说："《历象本要》，虽于此道未能万一，然经高明增改，故亦不忍便毁弃之。夏间复点窜字句，诸友重为图书缮写。……求辍三五日正务，细为删改，务使文虽浅略而无伪谬……图有舛错，亦求标出。"可见它"经高明增改"过，此"高明"者中应有杨文言。

梅文鼎和李光地是在北京结识的。梅氏 29 岁开始学习历算，写出他的第一部著作《历学骈枝》，此后一直在家乡和南京、杭州等地从事研究活动，撰写了一批著作，引起了人们的注意。1679 年，施闰章(1618—1683)邀他为《明史》历志撰写稿件，但他因故未能赴京，仅寄《历志赘言》一文，表明了自己的意见和建议，被史局采纳。

1689 年，五十七岁的梅文鼎到了北京，明史馆立即请他参加《明史》历志的修订审定工

作。他以《明史历志拟稿》赢得人们的赞誉，震动史局，学者们十分满意，"服其精核"。"于是辇下诸公皆欲见(梅文鼎)先生，或遣子弟从学，而书说亦稍稍流传禁中。"尽管梅氏"素性恬退，不欲自炫其长，以与人竞"，但是仍有一些人十分害怕他的学识对自己造成不良影响，尤其是"台官"，"甚畏忌之"[4]。

由于历算不是儒家正统学术，真正下功夫学习研究它的人并不多，不久，跟随梅文鼎学习的人也所剩无几了。唯独李光地对历算的兴趣不减，主动帮助梅氏，虚心向他学习。方苞在提到当时的情况时说："康熙辛未(1691)，余再至京师，时诸公方以收招后学为名，天下士负誉者皆聚于京师，……而(梅文鼎)君所抱历算之学，好者甚稀。惟李文贞公及其徒三数人从问焉。"[5]梅、李二人从此成为亲密的朋友，建立了深厚的友谊，梅、李二家也建立起了联系。同时，梅文鼎的学术研究也进入了一个新阶段，取得了一系列重大研究成果，这与李光地的支持和促进有密切的关系。

下面，将从四个方面来说明李光地是如何帮助和支持梅文鼎的。

一、为梅氏的学术研究提供了良好的环境

李光地曾经两次为梅文鼎开辟活动场所，促进了他的学术研究。

梅文鼎在京师的工作和他渊博的学识对李光地有很大的吸引力，他们之间进行了广泛的交流和讨论。1691年夏天，李光地把他请到家中住了半年。这一方面使他在京有了一个稳定的研究基地，另一方面避开了各种干扰，专心致志从事学术工作。梅氏取得了较好的成果，完成了《历学疑问》的部分稿件。

几年以后，李光地又在保定官署为他开设学馆。1703年，李光地为直隶巡抚，康熙帝赐给他《几何原本》和《算法原本》等数学书籍。为了能更好学习这些著作，他请来梅文鼎主持学馆。随同进馆的还有其弟文鼐、子以燕、孙瑴成，李光地也让弟鼎征、子世得和其他一些人与梅氏家族一起研讨。除研究康熙帝所赐书外，梅文鼎和他的学生们还研究讨论各种天算问题，他感到自己收获也很大，十分满意，后来回忆道："安溪相国(李光地)以冢宰开府上谷，公子世得孝廉钟伦锐意历算之学，余兄弟及儿以燕下榻芝轩，与诸同学晨夕问难，甚相得也。"[6]这里诸同学是指魏廷珍、徐用锡、陈万策、王之锐、王兰生等人，梅瑴成在《历象本要》序中提到了这些人："公(李光地)当世大儒，门下皆一时名士，如景州魏公廷珍、交河王公兰生、河间王君之锐、晋江陈公万策、宿迁徐公用锡咸在署，公子钟伦以定省至。公悉令受业于先徵君。"[7]梅文鼎在保定讲学和研究的时间较长，1706年夏天才返回宣城家里，李光地在1703年有诗描写当时梅氏讲学的盛况[8]。这期间，梅氏著书立说，成果甚丰，梅文鼐也完成了《比例规用法假如》一书。李光地所起的作用值得称道。

二、促进了梅氏学术思想的完善

李光地对梅文鼎的研究工作提出了一些合理的建议，促进了梅氏学术思想的完善。《历学疑问》的完成和书中思想体系的形成就是一个典型的例证。

梅文鼎早期致力于清理古今历法体系，对各家历法做了研究和归类，比较中、西、回三家历法，颇有所得，撰《古今历法通考》五十八卷，后又增至七十多卷。李光地对这项工作倍加赞扬，但他认为："历法至本朝大备矣，经生家犹苦望洋者，无快论以发其意也。"建议梅氏再写一部简明易读的书，供人们学习，"俾人人得其门户，则从事者多，此学庶几益显。"[9]李光地在《历学疑问》序中说："余谓：先生宜撮其指要，束文伸义，章逢之士得措心焉。夫列代史志掀

及律历则几而不视，况一家之书哉。”梅文鼎采纳了这个建议，打算写一部新书，但他“雅不欲袭陈言，又欲其望而辄解，斟酌于浅深详略之间，屡涉笔而未果。”直到1691年，他迁入李氏宅邸中才真正开始动笔。李光地十分关心这项工作，利用一切闲暇时间帮助梅氏，他一连数月“绝诸酬应，退食之余，亟问今日所成何论，有脱稿者，手为点定。”经过努力，梅文鼎完成《历学疑问》三卷53篇，以答问形式阐述了自己的历学观点。此书给他带来了极高的荣誉。

《历学疑问》三卷是梅氏研究计划的一部分。他返回宣城后，还经常得到李光地的鼓励和督促，希望尽早完成全部计划。李氏在一封信中写道：“数年来著述，虽有数种就绪，然《疑问》、《存古》之类，尊意以为不可不成者，即后学所不可阙，精神稍健，幸并日为之，……尊稿有陆续成者，烦令孙写草先寄，远期为绝学，自重。”直到晚年，梅氏才最终补全了《历学疑问》的续篇：《历学疑问补》二卷23篇。

梅文鼎二度住在李氏府邸，与他讨论研究，受到不少启发，完成了一些著作，如《平立定三差详说》、《交食作图法订误》、《交食管见》等。同时，他的一些学术思想和观点得到了发展和完善，李光地起了一定的作用。

李氏之弟和子对梅氏的研究也有很大的帮助和促进。李世得“敏而好学，事事必求其根本，所谓胸中无膏盲之疾者也”[10]。他研究《环中黍尺》有心得，并有述作。又向梅氏请教平、立、定三差问题，促使梅完成《平立定三差详说》一书。

三、出版了一批梅氏的著作

梅文鼎一生著述甚丰，初步统计有101种[11]。到1699年，已有“历法书五十八种，算数法二十二书，卷辄万言，帙惟八十”。可是刊刻的很少，因此施彦恪专门写了《征刻历算全书启》，吁请人们出资出力，帮助出版。他写道：“惟昔巩先蔡子首锓《筹算》于白门，亦有冰叔征君亟冠弁言于《通考》，《疑问》三卷见燕山节度之新刊，《方程》一篇得泉郡孝廉而广布。然而分来片玉，定想昆冈，折得一枝，益思邓圃。”梅文鼎本人在《中西星经异同考》序中也说：“其他算学新稿，亦且盈尺，而未能出以问世，虚名之负累，谬四方学者所知，而欲传之，其人复求之不可得也。”他迫切希望能尽早把自己的研究成果公布于世的心情跃然纸上。

李光地在出版上给予梅氏很大帮助，经他手刊刻了一批著作。

1693－1696年，李光地出任顺天学政，刊印了《历学疑问》，他本打算连《历学疑问补》一同出齐，但当时尚未脱稿。1698－1705年，他任直隶巡抚，又刊刻了梅氏的多种书籍。据梅瑴成《梅氏丛书辑要》“校阅助刻姓氏”载：“安溪相国李文贞公厚庵：督学几辅，校刊《历学疑问》，进呈御览，有恭记，刻于本卷。又巡抚直隶，校刊《三角法举要》、《环中黍尺》、《堑堵测量》等书九种于上谷。”又梅瑴成《增删算法统宗》指出下列九种为李光地所刊：《笔算》五卷、《平三角举要》五卷、《弧三角举要》五卷、《堑堵测量》二卷、《环中黍尺》五卷、《方程论》六卷以及《历学疑问》、《历学骈枝》、《交食蒙求》。正如钱宝琮先生所指出的：“其《方程论》六卷当即为李安卿刊于泉州者，《笔算》五卷与《历学骈枝》为金铁山所校刻，非皆李文贞所刻者也。”[12]梅文鼎晚年著《勿庵历算书记》在剩余六种下均注明：“安溪公刻于保定”，其中《交食蒙求》在《勿庵历算书记》中为两种：“交食蒙求订补二卷，已刻一卷”，“交食蒙求附说二卷，已刻一卷”。李光地是梅氏生前为他刻书最多的人。

李光地还让其子世得及他的随从人员共同参与校订等工作。梅文鼎在论及《堑堵测量》一书的出版情况时，写道：“……世兄李世得孝廉钟伦多所考订，而其(指李光地)群从世宪文学

鉴、及宿迁徐坊长用锡、安溪陈对初万策、景州魏君璧廷珍三孝廉，河间王仲颖之锐、交河王振声兰生二文学，并有校订之功。其中图象，则君譬及余孙瑴成手笔也。"[13]在李氏周围大家动手，人人出力帮助梅氏刊刻著作的情景由此可见一斑。

另外，李光地的弟弟李安卿在泉州刊刻了《方程论》。梅文鼎十分高兴，专门写诗答谢，有"李安卿孝廉刻余《方程论》于安溪，古诗四章寄谢"[14]，表达了他的感激之情。李还打算刻印《几何补编》，已经将书稿誊清，但因故未能实现[15]。

四、积极宣传梅氏的成就

梅文鼎以自己的研究确立了他在清初天算学上的领导地位，而李光地的宣传和对梅氏的赞扬使他获得了更高的声誉，他向康熙帝的举荐对梅氏一生来说具有特殊的意义。

1693 年，李光地为《历学疑问》写了序，对梅文鼎倍加赞扬。他说："《历学疑问》，梅子定九之所著也。先生于是学覃思博考四十年余，凡所撰述满家，自专门者不能殚览也。"他认为梅氏的著作"书体简实平易，不为枝离佶屈"。他又在《榕村语录续集》中写道："梅定老客予家，见其无一刻暇，虽无事时掩户一室中如伏气，无非思历算之事。算学中国竟绝，自定老作九种书〔筹算、笔算、度算、三角形、比例法、方程论、句股测量、算法存古、几何摘要〕，而古法竟可复还三代之旧，此间代奇人也。历书有六十余本，不能刻，七十二家之历，无不穷其源流而论之，可谓集大成者矣。"充分肯定了梅氏的成就。

康熙是中国历史上一位重视科学的皇帝，他曾召集大臣们讨论科学问题，并听说过梅文鼎。作为康熙的亲信，李光地对此十分清楚。康熙评价李光地说："李光地谨慎清勤，始终一节，学问渊博，朕知之最真，知朕亦无过光地者。"[16]康熙对西方科学很感兴趣，曾请西洋人授课。但人们对西学的态度并不相同，有的赞同，有的反对，聚讼纷纭。梅文鼎的《历学疑问》试图从学术的角度论述"西学中源说"，这正好符合康熙的心理。1702 年，康熙南巡途经德州，传旨让李光地"取所刻书集回奏"，李氏借机进呈了《历学疑问》，得到重视和好评。康熙说："朕留心历算多年，此事朕能决其是非。将书留览，再发。"第二天又说："昨所呈书甚细心，且议论亦公平，此人用力深矣。朕带回宫中仔细看阅。"[17]李光地抓住时机，请求"御笔批驳改定"，并写了"恭记"，记述进呈经过，宣扬梅氏成就，借皇帝之口说此书"无疵谬"。

当康熙让李光地举荐隐伦之士时，他再次推荐了梅文鼎。1705 年，康熙南巡时，又想起了梅文鼎，一连三天召见了他，讨论天算，赐给食品、书扇和"绩学参微"字幅。梅文鼎又进呈了《平三角举要》一书。后来，康熙又让梅瑴成把《律吕正义》寄给乃祖，并说："或有错处，指出更好"。

梅文鼎作为平民科学家，由历算而获得康熙帝的亲自接见和厚待，在历史上是罕见的。这对他有特殊重要的意义，不仅提高了声誉和地位，而且促进了他的科学研究工作。

李光地和梅文鼎友谊深厚，交往广泛。李氏应梅氏之邀撰写了"处士梅缵瞿先生墓碣"、"宣城梅氏重修祠堂记"等碑文。而梅氏也应李氏之约，审校了《历象本要》。1742 年，梅瑴成又为此书写了序言，此时李已去世 24 年了。当梅文鼎八十岁生日时，李光地写了"寿梅定九先生八十"[18]寄赠，盛赞梅氏的成就。梅文鼎对朋友的支持和帮助十分感激，在作为李氏七十岁生日贺礼的诗作"寄安溪相国"中，他特别表达了自己的敬意。

总之，他们在近 30 年的交往中建立了深厚的友谊，梅、李二家亦成为至交。他们共同为清初天文历法和数学的发展做出了贡献。有人对《畴人传》做了研究之后，认为在清朝的头一百

年中科学家是通过三大轴心相互联系的，这三大轴心即是梅文鼎、李光地和梅瑴成[19]。他们之间的相互帮助与促进的确是十分重要的。

应该说明的是，我们介绍李梅关系，特别是李的促进作用，只是试图从社会背景上来考察梅氏从事研究的条件，而无意夸大或拔高李氏的作用。尽管朋友们对梅氏的支持和帮助很大，但他成为历算大师仍然是由他自己的勤奋和品质决定的。李梅结交的基础主要是对天算的共同兴趣，而非其他。只要是作出促进科学发展的贡献，历史就不会遗忘他。

参 考 文 献

〔1〕 李迪、郭世荣：《清代著名天文数学家梅文鼎》，1988，上海科学技术文献出版社。

〔2〕 《清史稿》卷 262，“李光地”。

〔3〕 李光地：《榕树全集》卷 18、19、20。

〔4〕 毛际可：“梅文鼎传”，《知不足斋丛书》第 19 辑。

〔5〕 方苞：“梅徵君墓表”，《望溪文集》。

〔6〕 梅文鼎：“比例规用法假如序”。

〔7〕 梅瑴成：《历象本要》序。

〔8〕 李光地：“梅定久自南至，诸子从学中西算术，悟有强力，各有所造，以其暇日说文赋诗，喜而有作”诗一首，《榕村全集》卷 35。

〔9〕 梅文鼎：《历学疑问》序。

〔10〕 梅文鼎：《勿庵历算书记》，“平立定三差详说”。

〔11〕 同〔1〕，第 52—58 页。

〔12〕 钱宝琮：“梅勿庵先生年谱”，《钱宝琮科学史论文选集》，1983，科学出版社，第 633 页。

〔13〕 梅文鼎：《勿庵历算书记》，“堑堵测量”。

〔14〕 梅文鼎：《绩学堂诗钞》卷 4。

〔15〕 梅文鼎：《勿庵历算书记》，“几何补编”。

〔16〕 同〔2〕。

〔17〕 李光地：《历学疑问恭记》。

〔18〕 李光地：《榕村全集》卷 36。

〔19〕 乔纳森·波特著、林贻纹、王冰译：“中国近代早期的科学界”，《科学史译丛》1983 年第三期。

明安图的高位计算及其结果检验

罗 见 今
(内蒙古师范大学科学史研究所)

一 引 言

清代蒙古族科学家明安图(1692？—1765？)，字静庵，奉天蒙古正白旗(今内蒙古锡林郭勒盟正镶白旗)人。他生活于康熙、雍正、乾隆的时代，当时生产有发展，国力较强盛；康熙皇帝注重自然科学，常邀集来华的西方传教士到宫中讲学，也注重培养天文学数学等方面的人材。明安图便是从小受到康熙帝器重的人材之一。"自童年亲受数学于圣祖仁皇帝"[1]，大约在1710年被选入钦天监当官学生，专门学习天文、历法和数学[2]，继承了当时高深的科学知识。后经考试，供职于钦天监，1759年晋升为监正，直到去世。钦天监监正的职务，从名义上看相当于现今的国家天文台台长，实际上要负责解决天文、历法、气象、地理、测绘、数学等自然科学问题，就其在国家生活中所起作用而言，大体相当于今天的科学院院长。

1701年法国耶稣会传教士杜德美(*Pierre Jartoux*，1668—1720)来华，带来牛顿(*I. Newton*)和格列高里(*J. Gregory*)创立的三个圆函数的无穷级数展开式，引起了当时一些中国数学家的注意。1713年开始，清政府组织汇编《律历渊源》，明安图参加了这一工作，从杜德美处得知那三个公式。由于这是传统数学没有的，计算精确，使用方便，但杜德美并没有将公式的证明或推导过程一同带来，这便激起明安图一定要搞清楚它的原理的决心。"杜氏三术"在中国数学史上诱发起一场革命，中算从此开始从研究有限、离散、常量的传统领域向研究无限、连续、变量的新领域过渡，明安图便站在这一潮流的最前列。

明安图毕生供职朝廷，公务繁重，后来皇帝召见，一年达一、二十次。他利用空闲时间，从1730年开始著书《割圜密率捷法》(下简称《捷法》)，时断时续，"次第相求，以至成书，约三十余年"[3]。去世后由学生陈际新整理，于1774年定稿。几经周折，到1839年才出版，距离他开始研究无穷级数问题已是百余年之后的事了。在这本书中，明安图不仅证明了"杜氏三术"，而且还独创了六个三角函数的无穷级数展开式，后来被不恰当地合称为"杜氏九术"(占全书"题解"224面的的35.3%)。特别值得注意的是，该书第三卷"分弧通弦率数求全弧通弦率数法解(共八题)"(简称"通弦八题"，占20%)和第四卷"分弧正矢率数求全弧正矢率数法解(共八题)"(简称"正矢八题"，占41.5%)等内容，以前研究得不够充分，它们实际上是两类共十六个级数展开式。该书还有三角学和数学在天文学中的应用等内容，也需要深入探讨。

本文是"明安图研究"系列论文[4]~[7]中的一篇，讨论上述通弦八题和正矢八题。由于原著计算无穷级数展开式系数高达54位，大量数据须用计算机检验，故本文编写了相应的程序，并对结果进行了分析。

二　有关定义与结果

根据《捷法》卷三的概念，一段弧 $2l$ 所对通弦之长 x 应当表示成 $x=2r\sin\frac{l}{r}$，r 为圆半径。为简化表达式，本文取 $r=1$，将这时的弧长记为 $2a$，则 $2a$ 弧所对通弦

$$x = 2\sin a \qquad (0 < a < \frac{\pi}{4}) \tag{1}$$

而

$$x^n = (2\sin a)^n \qquad (n \geqslant 0) \tag{2}$$

称为"第 $n+1$ 率"，x^{2n+1} 称为"第 $2n+2$ 率"。

当 $m\geqslant 1$ 时 $2ma$ 弧所对通弦记作 y_m，则

$$y_m = 2\sin ma \tag{3}$$

称为"m 分全弧通弦"，这时的 x 称为"一分弧通弦"；或称 y_m 为"m 倍弧($2ma$)通弦"，x 为"本弧通弦"[8]。

按照安图的程序和方法，用今天的符号和公式表示出来，第三卷已获得如下有关结果：

$$y_2 = 2x - \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{2n+1}/4^{2n-1} \tag{4}$$

式中 $C_1=1, C_2=1, C_3=2, C_4=5, C_5=14, C_6=42, C_7=132,\cdots$ 在今天的组合学计数理论中一般称 C_n 数为卡塔兰数(*Catalan numbers*)，因法国数学家卡塔兰(*E. Catalan*, 1814—1894)的一篇论文[9]而得名。我们已提出明安图是卡塔兰数的首创者[5]，他的方法已相当于给出 C_n 数的如下递推公式[6]：

$$C_{n+1} = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \binom{n-k}{k+1} C_{n-k} \tag{5}$$

现在已知的 C_n 数计数法有数十种之多，其中卷积型递求公式是最常见的一种：

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-k} C_k \quad (C_1 = 1, n \geqslant 2) \tag{6}$$

我们已说明[7]，明安图已利用了这一关系，发现

$$-4C_n + \sum_{k=1}^{n-1} 4C_{n-k}C_k = 0$$

这样，下文中的 C_n 数均为已知。

将(1)、(3)代入(4)中，把系数化简，得

$$\sin 2a = 2\sin a - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin^{2n+1} a/4^{n-1} \tag{4'}$$

表明了(4)所蕴含的三角学意义。在论文[8]中，我们已用卡塔兰数的生成函数定理和牛顿二项式定理分别证明了(4′)的正确性。明安图获得

$$y_3 = 3x - x^3 \tag{7}$$

$$y_4 = 4x - 10x^3/4 + \sum_{n=1}^{\infty} (16C_n - 2C_{n+1}) x^{2n+3}/4^{2n+1} \tag{8}$$

$$y_5 = 5x - 5x^3 + x^5 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} y_{10} = {} & 10x - 165x^3/4 - 3003x^5/4^3 - 21450x^7/4^5 \\ & - 60775x^9/4^7 - \sum_{n=1}^{\infty}(16^4C_n - 8 \cdot 16^3C_{n+1} \\ & + 21 \cdot 16^2C_{n+2} - 20 \cdot 16C_{n+3} + 5C_{n+4})x^{2n+9}/4^{2n+7} \end{aligned} \tag{10}$$

以及 $m=100,1000,10000$ 时 y_m 的展开式，一般地可记作

$$y_m = mx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^m x^{2n+1}/4^{2n-1} \tag{11}$$

式中 A_n^m 表示展开式系数，如下表：

A_n^m (n \ m)	2	4	10	100
0	2	4	10	100
1	−1	−10	−165	−166650
2	−1	14	−3003	333000030
3	−2	12	−21450	−316350028500
4	−5	22	−60775	174888840755750
5	−14	52	−41990	−63080814962046700
6	−42	140	−22610	15978855666924598700
7	−132	408	−29716	−2992154858314966282280

续上表

A_n^m (n \ m)	1000
0	1000
1	−166666500
2	33333000000300
3	−3174492064314285000
4	176352028566840755557500
5	−6412281601910066962047267000
6	164397582457339380613970750787OO
7	−3130853319350554100164704566287942800

当 $m=100$ 时，参见《捷法》卷三第四十三页 a 面；

当 $m=1000$ 时，参见四十三页 b 面至四十五页 b 面算式末行。

当 $m=10000$ 时 A_n^m 的数表从略，$n=7$ 时明安图算出的系数有 52 位(参见四十八页 b 面算式末行)：

−31　32264　01271　14357　52669　78698　50597　63664　56628　79994　27000。

这些数字是怎样算出来的呢？我们在文[7]中已分析了明安图如何进行无穷级数的加、减、乘(数乘、项乘、自乘、互乘)法运算，并举出已知 y_{10} 求 y_{100} 的推算过程为例。$m=1000,10000$ 也是这样推求的。明安图共算出 m 的八个值的级数，即通弦八题。

根据《捷法》卷四的概念，将 $r=1$ 的圆中 $2\beta(\beta=2\alpha)$ 弧上正矢之长记作 u①，则

$$u = vers\beta \tag{12}$$

当 $m\geqslant1$ 时 $2m\beta$ 弧上正矢记作 v_m，则

$$v_m = versm\beta \tag{13}$$

称为"m 分全弧正矢"，这时的 u 称为"一分弧正矢"；或称 v_m 为"m 倍弧正矢"，u 为"本弧正矢"。

因 $u=vers2\alpha=1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha=x^2/2$，故

$$u^n = x^{2n}/2^n \tag{14}$$

所谓正矢八题，就是求当 $m=2,3,4,5,10,100,1000,10000$ 时 v_m 用 u 展开的八个幂级数。明安图用 $x^{2n}/2^n$ 的形式展开，由(14)知，与 u^n 等价。他获得如下结果：

$$v_m = \sum_{n=0}^{m-1} B_n^m u^n = \sum_{n=0}^{m-1} B_n^m x^{2n}/2^n \tag{15}$$

式中 B_n^m 表示展开式系数，如下表：

B_n^m (n \ m)	2	3	4	5	10	100
0	4	9	16	25	100	100000
1	−2	−12	−40	−100	−1650	−16665000
2		4	32	140	10560	11105556000
3			−8	−80	−34320	−3962700357000
4				16	64064	879191119206400
5					−72800	−132877748698240000
6					51200	14549383384936960000
7					−21760	−1206507617195897408000

当 $m=100$ 时，参见《捷法》卷四第十五页 b 面至十六页 b 面算式末行(第八条)。

① 2β 弧所对通弦的中垂线夹在弧弦间的线段长即正矢线，$vers\beta=1-\cos\beta$。据《捷法》，$\beta=2\alpha$。

续上表

n \ B_n^m \ m	1000
0	1000000
1	−166666500000
2	11111055555600000
3	−396819841289285700000
4	8818077603818334920640000
5	−133603896240579385791924000000
6	1468121829673788186088302096000000
7	−12233749097534451420559864743310800000

当 $m=1000$ 时，参见《捷法》卷四第十七页 b 面至十九页 b 面算式末行(第八条)。

当 $m=10000$ 时 B_n^m 的数表从略。

三　计算机检验程序

为求弦矢级数，明安图进行了大量高位数值计算，《捷法》三、四卷大部分叙述是系数繁多的公式和繁复的运算过程。他说“惟列加减乘除之数以备参考”，最大的一个数字高达 54 位。搞清各数的来龙去脉、判断它们是否正确并非易举，但这是研究工作无法回避的。

明安图之后，数学家董祐诚(字方立，阳湖人，1791—1823)发展了明氏的数学成果，撰《割圜连比例图解》三卷(1819)，他进一步研究了展开 y_m 和 v_m 的问题。[10]用本文的记号，他相当于获得①：

$$y_m=mx-\frac{m(m^2-1^2)}{4\cdot 3!}x^3+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{4^2\cdot 5!}x^5-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{4^3\cdot 7!}x^7+\cdots\cdots \tag{16}$$

$$v_m=m^2u-\frac{2m^2(m^2-1^2)}{3\cdot 4}u^2+\frac{2^2m^2(m^2-1)(m^2-2^2)}{3!\,4\cdot 5\cdot 6}u^3-\cdots\cdots \tag{17}$$

这两个公式写成三角函数的级数，就是：

$$\sin m\alpha=m\sin\alpha-\frac{m(m^2-1^2)}{3!}\sin^3\alpha+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\sin^5\alpha-\cdots\cdots \tag{16'}$$

$$\operatorname{vers}m\beta=m^2\operatorname{vers}\beta-\frac{m^2(m^2-1^2)}{2!\,1\cdot 3}\operatorname{vers}^2\beta+\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)}{3!\,1\cdot 3\cdot 5}\operatorname{vers}^3\beta-\cdots\cdots \tag{17'}$$

① 董祐诚在用(16)式时限定 m 为奇数，以使展开式为有限。(16)、(17)式已将原著中的系数作了适当调整。

式(16′)数学家欧拉(*L. Euler*，1707—1783)已获得。但在明安图和董祐诚生活的时代尚未传入中国。欧拉在三角级数上的这一成就是华蘅芳(1833—1902)在《代数术》第二十四卷第 256 款介绍到中国的[11]。明安图并未获得(16)、(17)这样一般性的结果。据此本文推测，明氏之所以未将通弦八题和正矢八题列入卷一“步法”(级数公式表)，一个可能的原因是他或许已认识到，这些结果数据庞大，尚不足以与“九术”相比美。

但是，先行者胼手胝足的开垦并非徒劳，大量数据为后继者保存了大量信息。现在人们不会对繁琐哲学感兴趣，但在历史上，它却代表着数学发展由繁至简、由个别到一般某个阶段上的倾向。

当遇到一个古代的数学公式时，作为历史研究工作，至少应当回答如下问题：一、它是什么？即它与哪个现代写法的公式类同或等价？如果找不到类似的结果，那么就有问题二、它对不对？即不论用古代或现代的理论判断，它是否能够成立？对明安图的上述十六个展开式，以前的研究并没有明确回答这两个问题。

事实上，《捷法》通弦八题和正矢八题的主要目标，就是计算当 $m=2,3,4,5,10,100,1000,10000$ 时式(16)和(17)中不超过前八项的展开式。明安图的方法较繁，但我们可利用(16)、(17)或(16′)(17′)来检验《捷法》的结果是否正确。

首先确定检验程序中的算法公式。

式(16′)中，令展开式系数依次为 a_0，a_1，…。考虑式(11)和(16′)展开式第 $n+1$ 项与第 n 项($n\geqslant 1$)之比，由 $x=2\sin\alpha$ 知

$$\frac{A^m_{n+1}x^{2n+1}/4^{2n+1}}{A^m_n x^{2n+1}/4^{2n-1}}=\frac{A^m_{n+1}}{4A^m_n}\sin^2\alpha$$

$$\frac{a_{n+1}\sin^{2n+1}\alpha}{a_n\sin^{2n+1}\alpha}=-\frac{m^2-(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\sin^2\alpha$$

可知

$$\frac{A^m_{n+1}}{4A^m_n}=-\frac{m^2-(2n-1)^2}{2n(2n+1)}$$

亦即

$$A^m_{n+1}=-\frac{2[m^2-(2n-1)^2]}{n(2n+1)}A^m_n \qquad (n\geqslant 1) \tag{18}$$

$A^m_0\equiv m$(即式(11)展开式首项系数恒为 m)。须据 $A^m_1=-m(m^2-1)/6$ 作为递归初始条件，即可依(18)式逐次计算展开式的各项了。

我们编出的《捷法》卷三通弦八题的计算机检验程序 A 如下①：

```
10   OPEN"LRS.DAT"FOR OUTPUT AS FILE   #2%
20   OPTION TYPE=EXPLICIT,  &
            SIZE=(REAL HFLOAT, INTEGER LONG)
30   DECLARE HFLOAT A,M,N
40   PRINT   #2%
50   PRINT   #2%,"M=",
```

① 我们使用 MICRO VAX—Ⅱ型计算机，程序中已包含了使用双精度浮点运算及打印结果的命令。

```
60  INPUT M
70  PRINT  #2%, M
80  IF M=0  THEN 200
90  A=-M*(M*M-1)/6
100  PRINT  #2%, NUM1$(A)
110  FOR N=2 TO 7
120  A=-A*2*(M+2*N-1)*(M-2*N+1)/N/(2*N+1)
130  IF A>0  THEN PRINT  #2%,"+";
140  PRINT  #2%, NUM1$(A)
150  NEXT N
160  GOTO  40
200  END
```

为了验算《捷法》卷四正矢八题计算结果，本文设计了一个与式(17′)等价的公式：

$$vers\,m\beta = \sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n \frac{2^n m}{n+1}\binom{m+n}{2n+1} vers^{n+1}\beta \qquad (19)$$

明安图给出的 v_m 展开式任一系数可径由式(19)表出。例如卷四中算 $m=10000$，展式取到第八项($n=7$)，由(19)知这个数即 $-160000\binom{10007}{15}$，前文述及，它是一个 54 位的数，要算出它即令用计算机也非易举。我们仍然使用递归法，寻求(15)和(19)展开式第 n 项与第 $n-1$ 项($n\geqslant1$)之比。注意到 $u=vers\beta$ 并设(19)展式系数依次为 $b_0, b_1, \cdots\cdots$，则有

$$\frac{B_n^m u^n}{B_{n-1}^m u^{n-1}} = \frac{b_n vers^n\beta}{b_{n-1} vers^{n-1}\beta}，省略 b_n/b_{n-1} 计算过程，$$

即得

$$B_n^m = -\frac{m^2-n^2}{(n+1)(2n+1)} B_{n-1}^m \qquad (n\geqslant 1) \qquad (20)$$

由于 $B_0^m \equiv m^2$，可以作为递归初始条件，这样就可以按(20)式逐项计算(15)展开式各系数了。

我们编出的《捷法》卷四正矢八题的计算机检验程序 B 如下：

```
10  OPEN"LRS.DAT"FOR OUTPUT AS FILE  #2%
20  OPTION TYPE=EXPLICIT,      &
          SIZE=(REAL HFLOAT,INTEGER LONG)
30  DECLARE HFLOAT B,M,N
40  PRINT  #2%
50  PRINT  #2%,"M=";
60  INPUT M
70  PRINT  #2%,M
80  IF M=0  THEN 200
90  B=M*M
100  PRINT  #2%,"+";NUM1$(B)
110  FOR N=2 TO 8
```

```
120  B=-B*(M+N-1)*(M-N+1)/N/(2*N-1)
130  IF B>0 THEN PRINT   #2%,"+";
140  PRINT   #2%,NUMI$(B)
150  NEXT N
160  GOTO 40
200  END
```

四　检验结果分析·结语

在 MICRO VAX－Ⅱ型计算机上运行程序 A，可达精度最高为 33 位有效数字。当递次键入 $M=2,3,4,5,10,100.1000,10000$ 后，机器算出每串八个系数各需一两秒钟。与上述 A_n^m 数表对比，结果表明:明安图的计算全部正确无误。

当 $M=1000$ 时，第八个系数就有 37 位，这时机器只能显示 33 位，末 4 位均为 0。而原著末 4 位是 2800，是正确的。同样，当 $M=10000$ 时，各系数左起 33 位与原著均同，可判断出包括上述 52 位数在内的所有系数都是对的。

注意到当 $M=2$ 时机器给出恰为负卡塔兰数($-C_n$)，因之程序 A 稍加调整即可算出更大的 C_n 数来。

接着运算程序 B，当递次键入 $M=2,3,4,5,10,100,1000$ 后，机器算出的结果与上述 B_n^m 数表对比，38 个数值中除一个外都是一致的。最大的一个数($n=7$)有 38 位，末 5 位恰为 0，与原著完全相同。但 $n=4$ 即第五个系数计算机结果为：

8818077603818334920640000，而原著算得

8818077603 192717488640000(四卷十八页 a 面)

划线部分出现了错误。初步判断造成失误的原因是由少加 625617432×10^6 所致，非算理有误。

由于明安图使用的是递推算法，y_{10000}第 5 项($n=4$)利用这一错误结果也算错了，至 $n=7$，都是在大串数字中间有十个或十几位数字偏小。$M=10000$ 时 $n<4$ 的 B_n^m 由于入算数据正确，所以结果仍然是对的。由此看出，递归法计算得以正常进行的必要前提是每步运算正确无误，否则便会一错再错，这是这种算法的一个弱点。

明安图进行大量高位数值计算，都是假定有微小的 x 和 u 存在为前提的。当 $m=10000$ 时求 y_m 和 v_m，在 $r=1$ 的圆中，$y_m<2r=2$，$v_m<r=1$。经分析，这时 $x=2\sin a$ 中 $a<32.4''$，$x<3.14\times10^{-4}$，$x^{15}<2.87\times10^{-53}$，$A_7^{10000}$ 有 52 位，$A_7x^{15}/4^{13}$至少也是一个精确到 10^{-8}的数。用现今描述天体和原子的数量级进行的这些运算，构成了《捷法》的一个数学特色。

明氏注重精密度，相信弦与弧必能无穷逼近，合而为一，认为极微的线段总可无限接续，而成弦矢。换言之，明安图上述数学计算建立在形数相别又相生、曲直相异又相同的思想基础之上。所以，李俨先生指出:“明安图以三十年之精思，始撰成《割圜密率捷法》，以解析‘九术’，并由连比例三角形入手。此数与形的结合，堪与笛卡儿(Descartes)钊解析几何媲美。”[12]日本著名数学史家三上义夫称赞说“圆理发达为最紧要之事件，可比西洋之定积分，其算法则始于所谓杜氏九术……然虽云九术，实仅三术，梅瑴成收之于《赤水遗珍》，三术用无限级数

表三角函数，虽有相当于公式者，而解释之方法不备。及蒙古族人钦天监监正明安图，积三十余年之辛劳，始考出解析方法，且别附以六术。"[13]

无穷级数是微积分学不可缺少的部分。中国传统数学没有进入微积分的全面发展时代，唯在无穷级数方面一枝独秀，成果累累。明安图在自己的著作中开创了无穷级数研究的新方向，设计了无穷级数的记法，奠定了无穷级数运算的基础，并获得一系列无穷级数展开式，在百余年间影响了清代几十位数学家，构成了一大学派，涌现出一批著作[14]。因此，搞清楚明安图数学思想、方法和成果是十分必要的。

但是，也应看到，由于传统数学发展水平的限制，明安图使用文叙述，没有达到符号代数的阶段；他并没有导数、收敛、连续等概念，同西方数学有很大区别；他的方法基本上还是传统的、离散的，重点放在计算展开式系数上，一再使用递归法，具有鲜明的计数性、程序性。因此，仅有分析学的观点来总结明安图的数学成果是不够的，需要有离散的、递归的、计数的新观点，并使用计算机，才能恢复明氏学术的本来面目，并得到进一层的理解。可以予见，随着当今学术界对清代数学兴趣日增，对明安图学术将会涌现更多、更深入的研究成果。

明安图在中国数学中上的贡献是不可泯灭的。

参 考 文 献

〔1〕 明安图:《割圜密率捷法》，道光己亥(1839)孟秋，石梁岑氏校刊本，陈际新序，第一页。

〔2〕 李迪:《蒙古族科学家明安图》，内蒙古人民出版社，1978年，第3页。

〔3〕 同〔1〕，第三卷，第二页。

〔4〕 罗见今:明安图公式辨正，内蒙师大学报，1(1988)，42－48。

〔5〕 罗见今:明安图是卡塔兰数的首创者，内蒙古大学学报，2(1988)，239－245。

〔6〕 罗见今:明安图创卡塔兰数的方法分析，内蒙师大学报，1(1989)增刊。

〔7〕 罗见今:明安图计算无穷级数的方法分析，自然科学史研究，3(1990)，197－207。

〔8〕 同〔1〕，第三卷第二十三页 *b* 面"本弧之通弦加一分弧之通弦，二倍弧之通弦如二分全弧之通弦，后仿此。""加"当为"如"。

〔9〕 *Catalan E.*, *Note sur une equation aux difference finies*, *J. Math. Pures Appl.*, 3(1838) 508－516.

〔10〕 李俨:董祐诚的《割圜连比例图解》，《中算史论丛》第三集，科学出版社，1955年，353。

〔11〕 严敦杰:早期输入中国的欧拉学说，《科学史集刊》1(1958)，24－25。

〔12〕 李俨:明安图的《割圜密率捷法》，《中算史论丛》第三集，科学出版社，1955年，299－300。

〔13〕 三上义夫:《中国算学之特色》，林科棠译，《万有文库》本，80。

〔14〕 同〔4〕，43页。

《象数一原》中的卡塔兰数

特古斯
（内蒙古师范大学科学史研究所）

《象数一原》是清代数学家项名达（1789－1850）的代表作，全书七卷，其中卷四大半并卷七为戴煦（1805－1860年）所补。前四卷主要用于建立递加数，项名达在发明半分递加数的过程中得到了卡塔兰数。

为构造递加数，项名达设计了如下一个模型：

$$a_{\frac{m}{n},k-1} - a_{\frac{m}{n},k+1} = (-1)^{k+1} a_{\frac{m}{n},k} x \tag{1}$$

$$a_{\frac{m}{n},k-1} + a_{\frac{m}{n},k+1} = \begin{cases} c_{2(\frac{m}{n}+\frac{k-1}{2})} & \text{若 } |k+1| \text{ 为奇数，} \\ 2 - b_{\frac{m}{n}+\frac{k-1}{2}} & \text{若 } |k| \text{ 为奇数。} \end{cases} \tag{2}$$

这里 $a_{\frac{m}{n},k}(k\in z)$ 是单位圆上的一些线段，满足

$$a_{\frac{m}{n},0} = a_{\frac{n-m}{n},0} \quad a_{\frac{m}{n},-1} = -a_{\frac{n-m}{n},1} \tag{3}$$

$\frac{m}{n}(1\leqslant m\leqslant n)$ 为既约的，表示起度指标。b_n 是 n 分倍矢，c_n 为 n 分通弦，而 $x=c_1$。

这一模型表现为《象数一原》所特有的一种几何作图方法，或可说是它所独具的一种割圆方案：当 $\frac{m}{n}$ 一定时，以 n 为本度匀析分圆（不失一般性，这里均取单位圆），过各分点作半径，由 $\frac{m}{n}$ 分点起度作弦 $C_{2(\frac{m}{n}+\frac{k-1}{2})}$，其中 $|k+1|$ 为奇数。如图1所示，即为（1）、（2）当 $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ 时的情形。称相似等腰三角形 $\triangle OAB$、$\triangle CBD$、$\triangle ODE$、…为半分起度第一、第二、…第 n 形，自然地，此时相似等腰三角形 $\triangle CAD_1$、$\triangle OD_1E_1$、…便称为半分起度负第一、第二、…第 n 形；$a_{\frac{m}{n},k}$ 当 $k<0$ 时则为第 k 腰，当 $k\geqslant 0$ 时为 $k+1$ 腰。另外，由弦矢关系

$$(2-b_n)^2 = 4 - c_{2n}^2,\ c_2 = \sqrt{4x^2 - b_1^2},$$

有 $b_1 = x^2$。因此（1）、（2）还体现了明安图传统的割圆连比例关系——"一率半径，二率通弦，三率倍矢"，即以本弧通弦 x 为公比的连比例关系 $1:x:x^2$。由此递生的 x^p，就称为 $p+1$ 率。

由于 $a_{\frac{m}{n},1}$ 与 $a_{\frac{m}{n},0}$ 分别可按本弧通弦 x 与倍矢 x^2 正项展开，即存在 $A_{k,r}>0(k=0,1)$，使

$$a_{\frac{m}{n},k} = \sum_{r=0}^{\infty} A_{k,r} x^p,\ (p = 2r + \frac{1-(-1)^k}{2})$$

成立，于是，如记

$$H_k^p = \begin{cases} 0, & \text{若 } p<0 \\ (-1)^r A_{k,r}, & \text{若 } p\geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

则由（1），对一切 $k\in z$，有

$$a_{\frac{m}{n},1}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}H_{r}^{k}x^{r},$$

其中

$$H_{p}^{k}=H_{p-2}^{k}+H_{p-1}^{k-1},\ p、k\text{同奇偶} \tag{5}$$

所谓递加数，就是(5)在一定初值下的解，$m=n$ 时的解称为整分递加数．$2m=n$ 时为半分递加数，$2m<n$ 或 $n<2m<2n$ 时则为零分递加数。为确定(5)的半分初值(4)，令 $n=2$，$m=1$，注意到

$$2-b_{\frac{1}{2}}=\sqrt{4-c_1^2}=\sqrt{4-x^2},$$

则由(1)、(2)，

$$a_{\frac{1}{2},0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}},\ a_{\frac{1}{2},1}=\frac{1}{2}xa_{\frac{1}{2},0} \tag{6}$$

于是开方求出 $\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$ 就成了关键。

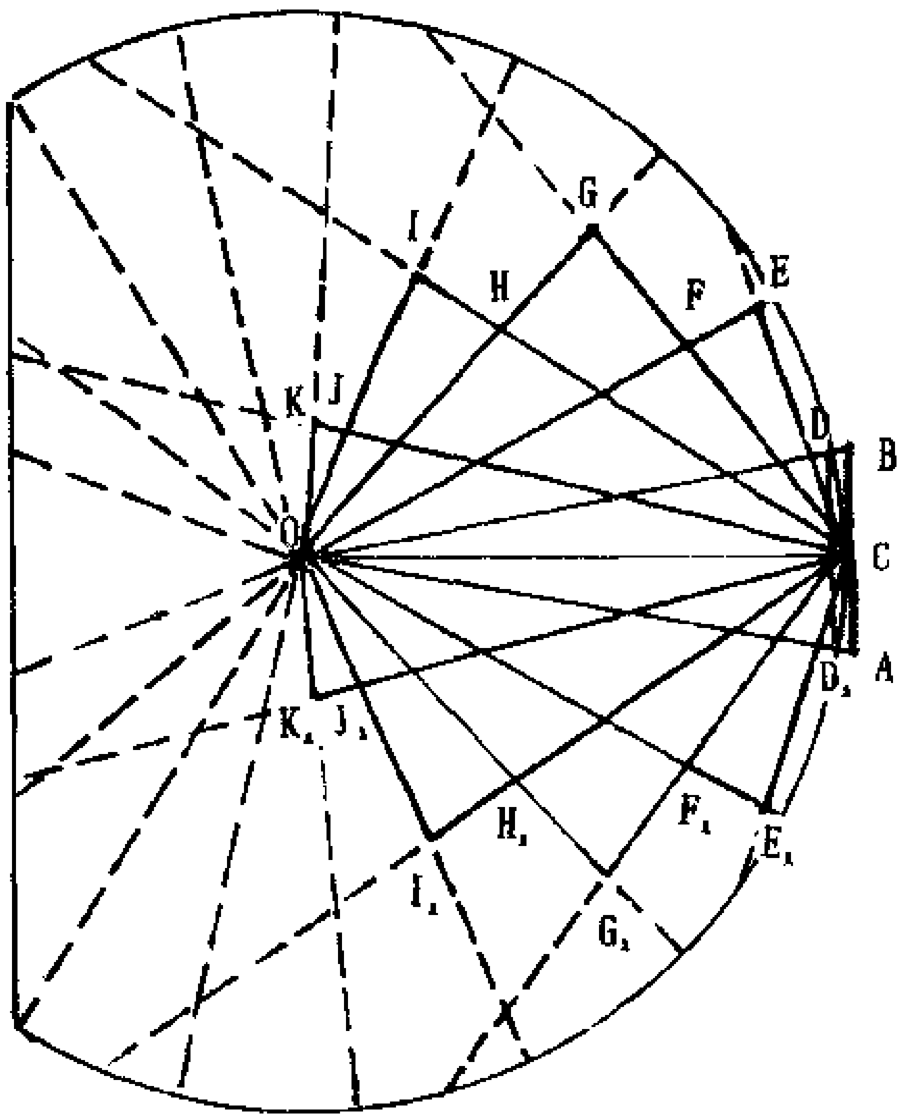


图1

项氏所用开方算法如表1，“作左右两线(指表1中第四列与第六列之间的两条竖线)，列实一率一正、二率四之一负于右线右(第六列)。二率书分子，应寄四除。四乃分母二自乘之数，故旁寄自乘。开方法先以实一率一正开方，仍得一率一正为初得数，书左线右(原文误左为右，此处当指第四列)一率之位(第1行)。实之一率已开过，作线抹去。乃用初得数一率一正为除法，除实二率又折半，得三率八之一负。八乃分母再乘数，故旁寄再乘，书得数三率之位(第四列第3行，以下类此)。实之二率已除过，作线抹去。复以得数三率自乘之，得三率一正，分寄五乘为乘数，书左线左以减右实，无对易为负，书右线右。得数一率除之又折半，得五率一负，分寄六乘，书得数五率之位。减过之乘数，除过之负实均作线抹去。复以得数五率、三率相乘倍之，得四率二正，分寄九乘为乘数，书左线左以减右实，无对易为负，书右线右。得数一率除之又折半，得七率二负，分寄十乘，书得数七率之位。减过乘数、除过负实均抹去。复以得数七率三率相乘倍之，得五率四正；又得数五率自乘，得五率一正，皆分寄十三乘并书左线左，并以减右实，无对易为负，书右线右。得数一率除之又折半，得九率五负，分寄十四乘，书得数九率之位……。如是按上下之位挨次递乘，并以减实，一率除之，折半可得各率。”

表 1

			得数		实	
			1	x^0	1	
			0	x^1	$-1/2^2$	
		$1/2^6$	$-1/2^3$	x^2	0	$-1/2^6$
		$2/2^{10}$	0	⋮	0	$-2/2^{10}$
	$1/2^{14}$	$4/2^{14}$	$-1/2^7$	⋮	0	$-5/2^{14}$
	$4/2^{18}$	$10/2^{18}$	0		0	$-14/2^{18}$
$4/2^{22}$	$10/2^{22}$	$28/2^{22}$	$-2/2^{11}$		0	$-42/2^{22}$
$20/2^{26}$	$28/2^{26}$	$84/2^{26}$	0		0	$-132/2^{26}$
			$-5/2^{15}$		0	
			0		0	
			$-14/2^{19}$		0	
			0		0	
			$-42/2^{23}$		0	
			0		0	
			$-132/2^{27}$		0	

以上过程如以今法表示就是

$$\sqrt{b_0+b_1x^2+b_2x^4+\cdots+b_nx^{2n}}$$

$$=\sqrt{b_0}+\frac{b_1}{2\sqrt{b_0}}x^2+\frac{b_2-\left(\frac{b_1}{2\sqrt{b_0}}\right)^2}{2\sqrt{b_0}}x^4+\frac{b_3-2\frac{b_1}{2\sqrt{b_0}}\frac{b_2-\left(\frac{b_1}{2\sqrt{b_0}}\right)^2}{2\sqrt{b_0}}}{2\sqrt{b_0}}x^6$$

$$+\frac{b_4-2\frac{b_1}{2\sqrt{b_0}}\frac{b_3-2\frac{b_1}{2\sqrt{b_0}}\frac{b_2-\left(\frac{b_1}{2\sqrt{b_0}}\right)^2}{2\sqrt{b_0}}}{2\sqrt{b_0}}-\left[\frac{b_2-\left(\frac{b_1}{2\sqrt{b_0}}\right)^2}{2\sqrt{b_0}}\right]^2}{2\sqrt{b_0}}x^8+\cdots \tag{7}$$

这里 b_n 即所谓“实”，等式右端系数即为“得数”。此处

$$b_0=1,\qquad b_1=-\frac{1}{4} \tag{8}$$

而当 $n\geqslant 2$ 时由于“减实无对”，故

$$b_n = 0,\ (n \geqslant 2) \tag{9}$$

以(8)、(9)代入(7)式，得

$$\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2} = 1-\frac{1}{2^3}x^2-\frac{1}{2^7}x^4-\frac{2}{2^{11}}x^6-\frac{5}{2^{15}}x^8$$
$$-\frac{14}{2^{9}}x^{10}-\frac{42}{2^{12}}x^{12}-\frac{132}{2^{27}}x^{14} \tag{10}$$

这正是表 1 所表达的结果，是二项式公式当指数为$\frac{1}{2}$时的一个特例，项名达在不了解西人二项之例的情况下得到这一结果，其工作值得称道。

为进一步弄清项名达得到(10)式的方法，我们将(10)式简记为

$$\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2} = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{2^{4n-1}}x^{2n} \tag{11}$$

并以 $b_0=1$，　$b_1=-\frac{1}{4}C_1$，　$b_n=0\ (n\geqslant 2)$代入(7)式，则

$$\sqrt{1-\frac{C_1}{4}x^2} = 1-\frac{C^1}{2^3}x^2-\frac{C_1^2}{2^7}x^4-\frac{2C_1C_1^3}{2^{11}}x^6-\frac{2(C_12C_1C_1^2)+C_1^2C_1^2}{2^{15}}x^8$$
$$=1-\frac{C_1}{2^3}x^2-\frac{C_1C_1}{2^7}x^4-\frac{C_1C_1^2+C_1^2C_1}{2^{11}}x^6$$
$$-\frac{C_1(C_1C_1^2+C_1^2C_1)+(C_1C_1)(C_1C_1)+(C_1C_1^2+C_1^2C_1)C_1}{2^{15}}x^8-\cdots \tag{12}$$

令 $C_1=1$，则(12)与(11)应当等价，因此

$C_2=C_1C_1$，

$C_3=C_1C_1^2+C_1^2C_1=C_1C_2+C_2C_1$，

$C_4=C_1(C_1C_1^2+C_1^2C_1)+(C_1C_1)(C_1C_1)+(C_1C_1^2+C_1^2C_1)C_1=C_1C_3+C_2C_2+C_3C_1$，

…………

即(10)的系数分子，系由下式而得

$$C_1=1,\quad C_n=\sum_{k=1}^{n-1}C_kC_{n-k},\quad (n\geqslant 2) \tag{13}$$

应当说明，(13)作为(7)的必然结果，是与(8)、(9)相关的。(7)如简记为

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n}b_kx^{2k}} = \sum_{n=0}^{\infty}u_nx^{2n}, \tag{14}$$

则其系数所表达的递归结构为

$$u_0=\sqrt{b_0},\ u_1=\frac{b_1}{2u_0},\ u_2=\frac{b_2-u_1u_1}{2u_0},\cdots,u_n=\frac{b_n-(u_1u_{n-1}+\cdots+u_{n-1}u_1)}{2u_0}。 \tag{15}$$

故在条件(8)与(9)下，为从(15)得到了(13)以至(11)只须令

$$u_n=-\frac{C_n}{2^{4n-1}} \tag{16}$$

(13)也存在于较(11)更一般的情形，事实上令 $z=-\frac{1}{4}x^2$ 代入(11)，则有

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_n z^n/2^{2n-1}。 \tag{17}$$

对此文献[1]给出了一个漂亮的三角学证明。

(13)恰好是卡塔兰数所满足的递归关系，依现代组合论，它是 $n-1$ 阶的非线性递归关系。设 X 是一个具有非结合乘法运算的代数系统，用 xy 表 x 对 y 之积。如果

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X,$$

而且这 n 个元素依上面列出的次序所能作出的一切可能的积彼此不同，则 C_n 即其个数。记数列 $(C_n)_{n\geqslant 0}$（为方便计，约定 $C_0=0$）的母函数为

$$f(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots,$$

由(13)可得

$$f^2(x) = -x + f(x), \tag{18}$$

其中项"$-x$"出现的原因是 $u_1=1$，且(13)对 $n\geqslant 2$ 才成立。由(18)解出 $f(x)$，得

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x}, \tag{19}$$

这里根号前之所以取负号，是因 $f(0)=0$ 之故。展开(19)，得出 x^n 的系数为

$$C_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2n}{2}\right)(-4)^n\left(-\frac{1}{2}\right)}{n!}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}。 \quad (n \geqslant 2)$$

这便是(13)的显式表达式，人称卡塔兰数。

清代数学家明安图(1692? —1765?)的无穷级数自乘运算中，实际上也包含着(13)。[9]而这里它被用来确定(10)的系数，却是项名达进行二项式展开式研究的一个自然结果，两者有异曲同工之妙。关于明氏创卡塔兰数的方法，可于文献[1]见详。

以下的分析表明了半分递加数与卡塔兰数相关的几个性质。首先，我们继续考察项氏构造半分递加数的过程。

既得(10)式，则

$$a_{\frac{1}{2},0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{2n}, \tag{20}$$

其中

$$u_0 = 1, \quad u_n = \sum_{m=0}^{n-1} u_m \frac{C_{n-m}}{2^{4(n-m)-1}}。 \tag{21}$$

这里用到了这样一个事实，如果

$$z_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad z_n = \frac{y_n}{x_1} - \sum_{m=1}^{n-1}\frac{x_{n-m+1}}{x_1}z_m, \tag{22}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} x_n。 \tag{23}$$

事实上，(22)为一 $n-1$ 阶的线性递归关系，可以写为 $y_n = \sum_{m=1}^{n} x_{n-m+1} z_m$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} z_{n-m+1} z_m = \sum_{s=1}^{\infty} z_s \sum_{n=1}^{\infty} z_n。$$

由此即得(23)或(20)。而

$$a_{\frac{1}{2},1} = \frac{1}{2} x a_{\frac{1}{2},0} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{2n+1}, \tag{24}$$

即(5)的半分初值为

$$H_k^0 = (-1)^{\frac{k}{2}} u_{\frac{k}{2}}, \quad H_k^1 = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{2} u_{\frac{k-1}{2}}。 \tag{25}$$

由此解得

$$H_k^p = \frac{v_p}{2^p p!}, \quad p、k \text{同奇偶}, \tag{26}$$

其中

$$v_0 = 1, \quad v_1 = k, \ v_p = [k^2 - (p-1)^2] v_{p-1}。$$

(26)即所谓半分递加数，由于对任 $k \in z$，$H_k^p \neq 0$，可以 p、k 为行列排成无限矩阵(表 2)。

表 2

$p \backslash k$		−2	−1	0	1	2	3	
0	…	1		1		1		…
1	…		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	…
2	…	$\frac{3}{2^3}$		$-\frac{1}{2^3}$		$\frac{3}{2^3}$		…
3	…		$\frac{1}{2^4}$		$-\frac{1}{2^4}$		$\frac{5}{2^4}$	…
4	…	$-\frac{5}{2^7}$		$\frac{3}{2^7}$		$-\frac{5}{2^7}$		…
5	…		$-\frac{3}{2^8}$		$\frac{3}{2^8}$		$-\frac{7}{2^8}$	…
6	…	$\frac{14}{2^{11}}$		$-\frac{10}{2^{11}}$		$\frac{14}{2^{11}}$		…
	…	…	…	…	…	…	…	…

表 2 中的 H_k^p，若 $k>0$ 项名达称之为 $\frac{k+1}{2}$ 根；若 $k<0$ 则称为 $\frac{k-1}{2}$ 根，而 H_k^0 为根差。当 $p \geqslant 2$ 时，H_k^p 依次称为平积、立积、三乘积、四乘积、…等等。他并指出，

$$H_k^p = (-1)^p H_{-k}^p \tag{27}$$

$$N_k^0 = 1,$$

$$N_k^p = \frac{1}{p!}\prod_{r=1}^{p}\left(\frac{1}{2}+k-r\right)。 \tag{28}$$

$$M_k^0 = 1,$$

$$M_k^p = \frac{1}{p!}\prod_{r=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2}+k+r\right)。 \tag{29}$$

(27)是半分递加数的条件对称性，只须注意到由(3)有 $a_{\frac{1}{2},-1} = -a_{\frac{1}{2},1}$，从而

$$a_{\frac{1}{2},-k} = (-1)^k a_{\frac{1}{2},k} \tag{30}$$

(28)当 $k>0$ 时表示通过 k 根的斜左线，当 $k \leqslant 0$ 时表示通过 $k-1$ 根的斜左线；p 为由根所在行起算的行数。不难看出，(28)当 $k=1$ 时恰为(17)的系数，即

$$N_1^n = (-1)^{n-1} C_n / 2^{2n-1}。 \tag{31}$$

(29)当 $k \geqslant 0$ 时表示通过 $k+1$ 根的斜右线，当 $k<0$ 时表示通过 k 根的斜右线。p 的意义同于(28)。由于 $M_k^p = N_{k+1}^p$，注意到(30)，即有

$$N_k^p = (-1)^p N_{-k}^p = (-1)^p M_{-k}^p。$$

再由(31)，得

$$M_{-1}^n = -C_n / 2^{2n-1}。 \tag{32}$$

项名达在构造$\frac{1}{4}$分递加数的过程中，又一次得到了卡塔兰数。构造零分递加数经过了借率与易率两个过程，即令

$$x' = c'_1 = \begin{cases} c_{\frac{1}{n}}, & \text{若 } |n| \text{ 为奇数}, \\ c_{\frac{2}{n}} & \text{若 } |n| \text{ 为偶数}, \end{cases} \tag{33}$$

于是

$$a_{\frac{m}{n},0} = \begin{cases} \dfrac{a_{1,|n-2m|-1}}{a_{1,n-1}}, & \text{若 } n \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{a_{\frac{1}{2},|\frac{n}{2}-m|}}{a_{1,\frac{n}{2}-1}}, & \text{若 } \frac{n}{2} \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{a_{\frac{1}{2},|\frac{n}{2}-m|}}{a_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}}, & \text{若 } \frac{n}{2} \text{ 为偶数}。 \end{cases} \tag{34}$$

$$a_{\frac{m}{n},1} = \begin{cases} \dfrac{a_{1,2m-1}}{a_{1,n-1}}, & \text{若 } n \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{a_{\frac{1}{2},n-m}}{a_{1,\frac{n}{2}-1}}, & \text{若 } \frac{n}{2} \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{a_{\frac{1}{2},n-m}}{a_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}}, & \text{若 } \frac{n}{2} \text{ 为偶数}。 \end{cases} \tag{35}$$

这就是借率以定初值之法。由于本率是以本弦为二率，即取 $x=c'_n=c_1$，须还借率为本率，这一过程称为易率法，明氏早有所用，非项氏首创，惟定准借易规则，则以项氏最详。由(1)

$$x = \frac{a_{\frac{m}{n},1} + a_{\frac{n-m}{n},1}}{a_{\frac{m}{n},0}}, \tag{36}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{a_{1,2m-1} + a_{1,2(n-m)-1}}{a_{1,|n-2m|-1}}, & \text{若 } n \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{a_{\frac{1}{2},m} + a_{\frac{1}{2},n-m}}{a_{\frac{1}{2},|\frac{n}{2}-m|}}, & \text{若 } \frac{n}{2} \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{a_{\frac{1}{2},m} + a_{\frac{1}{2},n-m}}{a_{\frac{1}{2},|\frac{n}{2}-m|-1}}, & \text{若 } \frac{n}{2} \text{ 为偶数}。 \end{cases} \tag{37}$$

式(37)是以(34)、(35)代入而得到的。当 $m=1$，$n=4$ 时由(37)，

$$x = \frac{a_{\frac{1}{2},1} + a_{\frac{1}{2},3}}{a_{\frac{1}{2},0}}。 \tag{38}$$

项氏算得(38)式右端分子为

$$a_{\frac{1}{2},1} + a_{\frac{1}{2},3} = 2x' - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2^{4n-1}} x'^{2n+1}, \tag{39}$$

即

$$H_1^{2n+1} + H_3^{2n+1} = (-1)^{n-1} C_n / 2^{4n-2},\ (n \geqslant 1)。 \tag{40}$$

事实上，由(6)及(1)

$$a_{\frac{1}{2},1} + a_{\frac{1}{2},3} = (2x + \frac{1}{2}x^3) a_{\frac{1}{2},0},$$

从而

$$H_1^{2n+1} + H_3^{2n-1} = \frac{1}{2} H_0^{2n-2} + 2H_0^{2n} = (-1)^{n-1} C_n / 2^{4n-2} \quad (n \geqslant 1)。 \tag{41}$$

(41)中第二个等式也可由数学归纳法获证。

由(4)与(20)，只须证

$$C_n/2^{4n-2} = \frac{1}{2}u_{n-1} - 2u_n。\tag{42}$$

当 $n=1$ 时(42)显然成立。今设 $n<k$ 时(42)成立，则当 $n=k$ 时有

$$\begin{aligned}
\frac{C_k}{2^{4k-2}} &= \frac{C_1}{2^4}\frac{C_{k-1}}{2^{4(k-1)-2}} + \frac{C_2}{2^{4\cdot 2}}\frac{C_{k-2}}{2^{4(k-2)-2}} + \cdots + \frac{C_{k-1}}{2^{4(k-1)}}\frac{C_1}{2^2} \\
&= \frac{C_1}{2^4}(\frac{1}{2}u_{k-2} - 2u_{k-1}) + \cdots + \frac{C_{k-1}}{2^{4(k-1)}}(\frac{1}{2}u_0 - 2u_1) \\
&= \frac{C_1}{2^3}(\frac{1}{2}u_{k-2} - 2u_{k-1}) + \cdots + \frac{C_{k-1}}{2^{4(k-1)-1}}(\frac{1}{2}u_0 - 2u_1) - \frac{C_k}{2^{(4(k-1))}} \\
&= u_0\left(\frac{C_{k-1}}{2^{4(k-1)}} - \frac{C_k}{2^{4(k-2)}}\right) + u_1\left(\frac{C_{k-2}}{2^{4(k-2)}} - \frac{C_k}{2^{(4(k-1)-2}}\right) + \cdots + u_{k-1}\frac{C_1}{2^2} \\
&= \sum_{m=0}^{k-2}\frac{u_m C_{k-m-1}}{2^{4(k-m-1)}} - \sum_{m=0}^{k-1}\frac{u_m C_{k-m}}{2^{4(k-m)-2}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{k-2}\frac{u_m C_{k-m-1}}{2^{4(k-m-1)-1}} - 2\sum_{m=0}^{k-1}\frac{u_m C_{k-m}}{2^{4(k-m)-1}} = \frac{1}{2}u_{k-1} - 2u_k,
\end{aligned}$$

其中第一等式成立，是因(13)之故；第二等式是归纳假设；第三等式中末项出现的原因是：

$$C_k/2^{4k-3} = 2C_k/2^{4k-2};$$

第五、第七等式成立，是(21)之故。(42)于是得证，故(41)成立。注意到(27)，由(40)还有

$$H^{2n+1}_{-1} + H^{2n+1}_{-3} = (-1)^n C_n/2^{4n-2}。\tag{43}$$

(31)、(32)、(40)、(41)以及(43)表明了半分递加数与卡塔兰数之间的关系，这些还是半分递加数性质中的几个等价性质。

参考文献

[1] 罗见今：明安图创卡塔兰数的方法分析，内蒙古师大学报，1989,1，29～40。

[2] 项名达：《象数一原》卷 2。

[3] 同[2]，卷 3。

[4] 李俨：明清算家的割圆术研究，中算史论丛第三集，科学出版社，1955:364～425。

[5] 柯召、魏万迪:递归关系，组合论，科学出版社，1981,127～135

[6] 何绍庚：项名达对二项展开式研究的贡献，自然科学史研究，科学出版社，1982，第 1 卷第 2 期，104～114。

[7] 川原秀城:中国の无限小解析，中国古代科学史论，京都大学人文科学研究所，1989:252～281。

[8] 甘向阳:割圆函数级数展开之研究，北京师大硕士论文，1988 年。

[9] 罗见今：明安图计算无穷级数的方法分析，自然科学史研究，科学出版社，1990，第 9 卷第 3 期，197～207。

清代对球及其部分的体积和表面积问题的研究

冯 立 升

（内蒙古师范大学科学史研究所）

我国古代很早就对球体积与表面积问题做过研究，《九章算术》已经给出了球体积与球冠面积的经验计算公式。三国时的数学家刘徽对《九章》中的这两个公式做了深入的研究，指出了公式的不准确性和近似性。南北朝时，祖暅在刘徽工作的基础上，推导了计算球体积的正确公式。祖暅之后，这方面的研究长期没有进展，直到清初，才有了新的突破；到了清代后期，关于球及其部分的体积与表面积公式的推导才获得圆满解决。清代有关的研究成果集中地反映在《方圆幂积》、《数理精蕴》和《截球解义》三部著作中，本文主要通过分析这三部书中的有关内容来阐述和评价清代在此方向上的进展。

一

清代著名数学家梅文鼎（1633－1721）在和友人讨论的基础上完成的《方圆幂积》（公元1710年）中给出了关于球的体积和表面积的一些命题，并对其中的多数命题进行了论证。由于《九章算术》在明末清初几近绝迹，梅文鼎时的数学家并不了解祖暅推导球体积公式的工作。梅氏从明末传教士编译的《测量全义》中了解到几个有关球体的未证明的命题，为他的研究提供了新的课题。《方圆幂积》主要讨论了以下5个命题：[1]

1. 球体积公式："以浑圆（球）径自乘再乘得浑圆径上立方，以圆率乘之得数，六除之，得浑圆积。"

2. 球的大圆周长的平方与球表面积的比等于圆周长与直径的比，球表面积与其大圆直径平方的比也与圆周长与直径的比相同。

3. 球的表面积是这个球的大圆面积的四倍。

4. 球的体积是以其大圆为底、半径为高的圆锥体的四倍。

5. 球体积是其外切圆柱体体积的三分之二，其表面积也为圆柱体表面积的三分之二。

易知命题1与4、命题2与3存在着等价关系，而命题5则可导出。独立的命题只有球体积和球表面积公式。梅文鼎用不同的方法论证了其正确性。

梅氏利用命题3、4论证命题5。他先讨论了此命题的后半部分："论曰：凡圆柱之面及底，皆立圆径上平圆也。旁周似圆甬，亦如截竹，周围并以圆径为高，即圆径乘圆周幂也，为径上平圆之四倍，与浑圆面幂同积。合面与底共得平圆之六倍。而浑圆原系平圆之四倍。是圆柱幂六，而浑圆幂四也…亦必为三之二矣。"然后又讨论了这一命题的前半部分："试于圆柱心（O）作圆角体，至面至底，成圆角体二（O－AB、O－CD）。皆以半径为高、平圆为底，其余则外如截

竹，而内则上下并成虚圆角。于是纵剖其一边(AC)，而令圆筒伸直，以其幂为底，以半径为高，成长方锥(O—ACC′A′)。此锥体即同四圆角，合底面二圆角，共六圆角矣。而浑圆体原

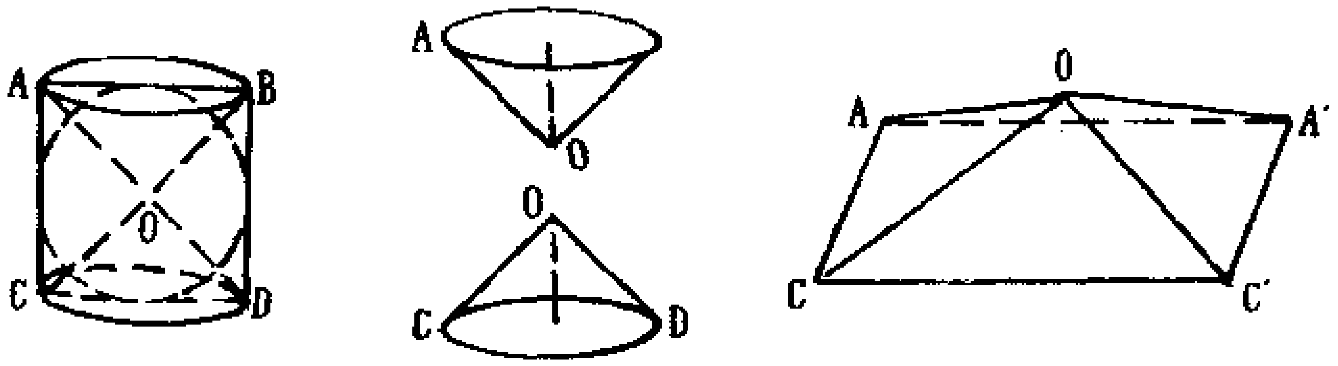


图 1

同四圆角。浑圆面为底，半径为高，作圆锥，即同四圆角。是圆柱浑圆二体之比例，亦三与二也。”(如图 1)由此可知，他先从外切圆柱中挖去两个底与球的大圆等且高同为球半径的圆锥，得到一个中空圆柱 O—ACBD，然后沿母线将圆柱剖开，伸直为一个四棱锥 O—ACC′A′。它的底面长为大圆的周长，宽为球直径，高为球半径，它的体积为挖去的一个圆锥的四倍，而圆柱的体积则为圆锥的六倍。由命题 4 可知，球体积为同一圆锥体积的四倍。因而推得球的体积是其外切圆柱体积的三分之二。他附带也获得了另一结果：圆柱的体积是同底等高圆锥体积的三倍。

梅文鼎在讨论把球体积和表面积四等分时，对命题 3、4 提出了自己的证明。

他的基本思路是用割补法把球体分解为四个等积球扇形，然后论证各自的关系，通过进一步的分解和对比最后获得结论。梅文鼎的论证是以下面三个命题为基础的。

A. 球扇形的体积与一个圆锥的体积相等，该圆锥的底面积与球扇形的底(球冠)面积相等，高为球的半径。

B. 平面图形围绕其所在平面上与它不相交的轴旋转，所形成的旋转体体积等于此图形的面积与其形心经过的圆周长度的乘积。

C. 球冠的表面积与一个圆的面积相等，此圆的半径是以球冠高和底圆半径为勾股的弦。

A 和 C 见于《测量全义》卷六之“量球一分之容”和“量球一分之曲面”。梅文鼎在《方圆幂积》中未加证明也没有指出来源。但是从他的《堑堵测量》中可知他是以极限思想来应用命题 A 的：“浑圆形，以浑圆面幂为底，半径为高作大圆锥而成浑积。……皆无数立三角所成，然则浑圆亦立三角也。”[2]在。《方圆幂积》中，他还说：“浑圆面既为平圆之四倍，从面至心，皆成角体，故体之比例亦四倍。”由此可知，他的理论根据是把球、球扇形体积看作为无数个小锥体总和的极限，每个小锥体相当于后人所称的微分球扇形，即以半径为高的微分锥体。根据这种思想方法，如已知命题 3 则可以推得命题 4，反之亦然。梅文鼎并不了解，命题 B 的一般情形，他只是得到了一个特例，未予证明。命题 C 也未证明就直接应用了。

梅文鼎的具体做法是，在球面上作出两个相距为球半径 R 的对称的圆 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$，然后沿

两圈圆周至球心"以半径旋行而割切之"，则得到两个全等的球扇形 O—AMB(甲)和 O—CND(乙)，和一个被挖去两个对称圆锥体的球台体 O—ABCD，称为"中空腰鼓体"，把它横截为二，上称"仰盂"(丙)，下称"覆碗"(丁)。这样把球分成了等积的四个球扇形(图 2)。

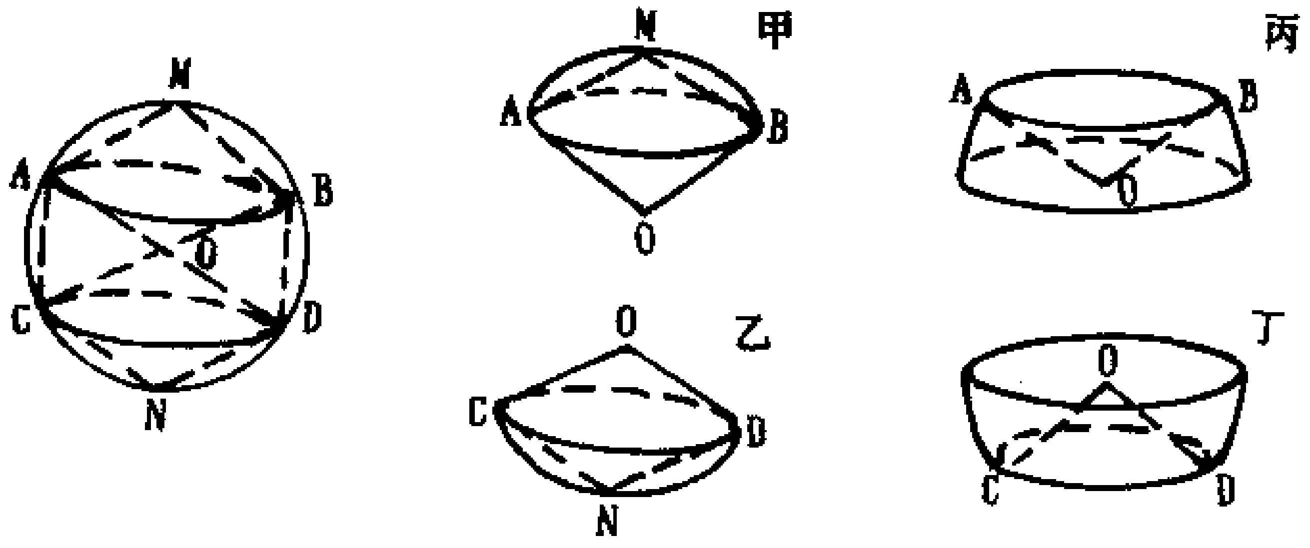


图 2

为了论证甲、乙、丙、丁等积，梅氏再行分割，以说明中空腰鼓体 O—ABCD 是乙或甲的二倍。他先从 O—ABCD 中挖出一个中空圆柱体 O—ABCD，而"所余者为内平外凸之空圈体"。他又在乙中挖去两个全等的圆锥 O—CD 和 N—CD，而剩余的部分称作"圆底仰盂"。运用在论证命题 5 时得到的结果，易证被挖去的中空圆柱的体积是两个圆锥体积的二倍。因此，关键是要证明剩余的外凸空圈体的体积也是剩余的圆底盂的二倍。

梅氏先证了被挖去的两部分的体积之比为 2∶1，然后又进一步论证剩余的两部分也有相同的比例。他把"空圈体"和"圆底仰盂"看成由两个面积相等弓形绕轴旋转一周后形成的两个立体。梅文鼎论证道："腰鼓之平面以半径循圆周行，圆底仰盂之平面则以半径自心旋转。周行者，两头全用，旋转者，在心一头不动，而只用一头，则只得其半矣。故决其倍大矣。"(图 3)他实际上用命题 B 的一个特例进行了论证。于是，中空腰鼓体是球扇形体积球体积的四分之一。

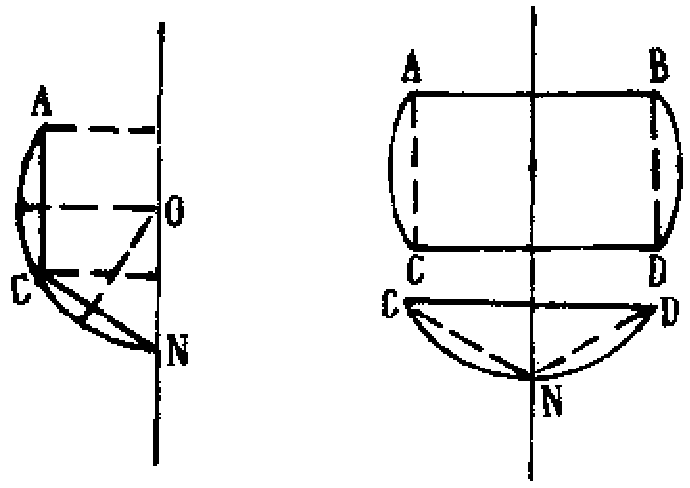


图 3

由命题 C，梅氏得出甲、乙的底(球冠)面积与球的大圆面积相等，而半球表面积是大圆面积的二倍。由此可得到命题 3，并且证明甲、乙、丙、丁底面积(球冠和球带)都与大圆面积相等。他还指出："体既匀分为四，则其浑体外幂亦匀分为四，亦无可复疑。"说明他已知道"体积相等的球扇形，其底面积也相等"这一结论。

梅氏并没有对球体积公式(命题 1 或 4)明确加以论证，但是由于分球所得甲、乙、丙、丁均相等，而由命题 A 和 C 可知球扇形的体积等于以大圆为底、以半径为高的圆锥的体积，因而自然可推得命题 4，亦即得到球体积公式。

《方圆幂积》还讨论了另一种四等分球的体积和表面积的方法。

由以上所述可知，梅文鼎的讨论有新发明，他用“中空圆柱”模型作为辅助形体，并且运用了极限思想，这均属创见。“中空圆柱”模型至今仍是一些教科书推导球体积公式所用的辅助几何体。而极限方法则是后来研究球体积的基本方法。梅氏提出的四等分球法极富创造性。古尔金(Guldin 1577—1642)定理(即命题B)清末才传入我国，[3]，但梅氏独立得到它的一个特例，尽管论述欠严格，却也是我国最早研究旋转体的一项成果。当然他的工作也存在不足，对最重要的命题1,3没有从正面论证，尽管曾附带作了证明，但在关键处却以未证的命题C作为基础，而对它能否成立未作说明，显然是一缺陷。但梅氏工作的意义，在于打破了中算史上这方面研究长停滞不前的局面，不但获得了一些前人没有的成果，而且拓宽了这一研究方向的内容，因此具有重要价值。

二

在梅文鼎完成《方圆幂积》之后不久，由康熙皇帝敕令编写的初等数学全书《数理精蕴》于1723年出版。这部书中也有球及其部分体积与表面积的内容，大体上未超过梅文鼎的水平，但包含了某些新的命题和内容。

《数理精蕴》上编卷二和卷三中述及球体积和表面积的几个基本命题，而下编卷二十六则给出球体积与表面积的计算问题及其求解方法。

该书上编卷二“几何原本五”第25节给出：[4]

命题1 “凡球体外面积与尖圆体(圆锥)之底等，而球体之半径与尖圆体之高度等，则此球体之积与尖圆体之积等也。”

该书上编卷二“几何原本十”第8,9,10,11节分别给出：[5]

命题2 “凡圆半径与球半径等者，其圆面积为球体外面积之四分之一”。

推论“圆面半径与球体全径等者，其圆面积与球体外面积等也”。

命题3 “凡球体径与上下面平行长圆体(圆柱)底径高度相等，则球体积为长圆体之三分之二也”。

命题4 “凡球体全径与长圆体底径高度相等者，其球体外面积与长圆体周围面积等也”。

命题5 “凡球体全径与上下面平行长圆体底径高度相等者，其相当每段之外面积皆相等也。”

《数理精蕴》论证了其中几个命题。命题3,4,5是以前面两个命题作为基础的，但对命题2却未作证明或说明，因此也存在不足。与《方圆幂积》比较，《数理精蕴》对命题2,3,4的论证并无新意，而对命题1,5的讨论却有新见。

《数理精蕴》是用极限思想对命题1加以论证的，与梅文鼎解释命题A的思想一致，但比梅氏的说明更为清楚和具体一些，内容如下：“如甲乙丙丁球体之外面积与己庚辛尖圆体之庚子辛癸底积等，球体之甲戊半径与尖圆体之己壬高度等，则此球体之积为与尖圆体之积等也。试将球体从中心分为千万尖体，复将尖圆体亦分为千万尖体，则球体所分尖体每一分，必皆与尖圆体所分尖体一分等。何也，盖球体所分尖体，皆以球体之外面为底，而以球体之甲戊半径为高；其尖圆体所分尖体，皆以尖圆体之底为底，而以尖圆体之己壬高为高；夫尖圆体之

底积，原与球体之外面积等，而尖圆体之高度，又与球体甲戊半径等，故此两种千万尖体，皆为同底同高，其积相等无疑矣。然此两种千万尖体，即球体、尖圆体之所分，其所分之体即等，则原体亦必相等可知。故球体与尖圆体俱相等也。”这里实际上相当于把球的表面与圆锥的底面分成面积为 ΔS 和 $\Delta S'$ 的许多小块，把球体看作是以 ΔS 为底、球半径为高的许多小锥体的和，而圆锥则看作是以 $\Delta S'$ 为底、球半径为高的许多小锥体的和。当小锥体的数目无限增多时，ΔS 与 $\Delta S'$ 则无限缩小且面积也相等。因球的表面积 $S_{球}$ 与圆锥底面积 $S_{锥底}$ 相等，即有

$$S_{球} = S_{锥底} = \lim_{\max\Delta S \to 0} \Sigma\Delta S = \lim_{\max\Delta S' \to 0} \Sigma\Delta S'$$

球体可看作是无数个小锥体体积的和，即 $V_{球} = \lim_{\max\Delta S \to 0} \Sigma \frac{1}{3}R\Delta S = \frac{1}{3}R \lim_{\max\Delta S \to 0} \Sigma\Delta S = \frac{1}{3}RS$ 而 $V_{锥} = \frac{1}{3}R \lim_{\max\Delta S' \to 0} \Sigma\Delta S' = \frac{1}{3}RS$ 因而有 $V_{球} = V_{锥}$。尽管该书的论述还不太严格，但思路是比较清楚的。

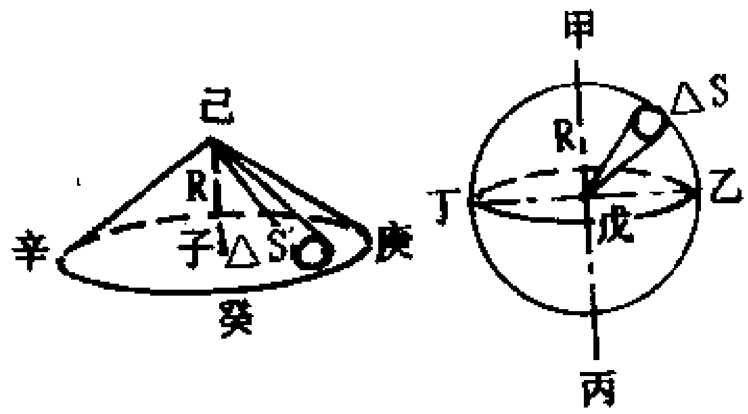
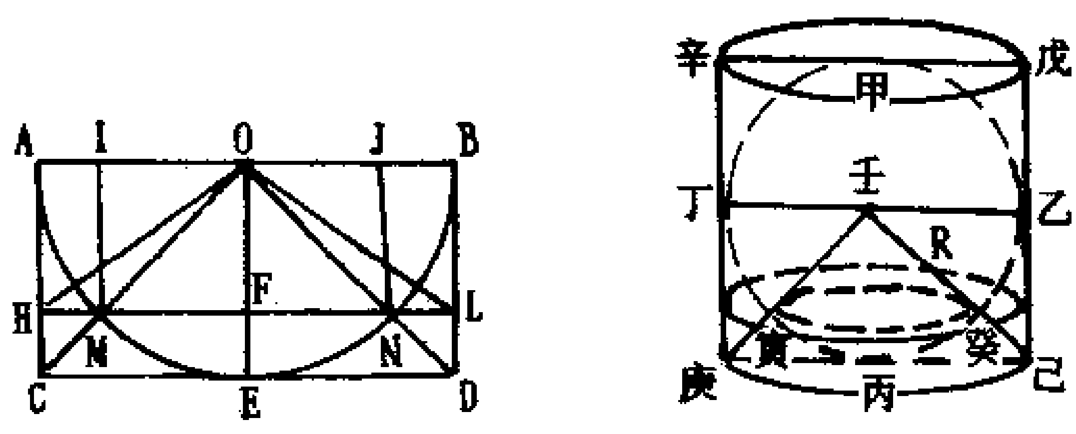


图 4

《数理精蕴》只`证明了命题 5 的一个特例，但证明的方法却很有特色且富有启发意义。对于图 5 所示的球和它的外切圆柱体，《数理精蕴》证明了如下结论：

“球体之癸丙寅(NEM)一段凸面积，必与相当长圆体之辰己庚巳(LDCH)一段周围外面积等也。”



(a)　　(b)

图 5

在图 5a 中，矩形 ABDC、半圆 ABNEN、等腰直角三角形 COD，分别表示圆柱、半球、圆锥通过对称轴 OE 的截面。HFL 表示过圆锥面与球面交线所作的平行圆柱底面的切割面。根据原文所述，先从 BLHA—段圆柱体中截出一个小圆柱 JNMI，剩余部分则为一筒状空心柱。由勾股定理有 $OF^2+FN^2=ON^2$，因 OFN 为等腰三角形且球的半径 ON 与圆柱半径 FL 相等(均为 R)，则 $FN^2=OF^2=R^2-FN^2$，由此可得 $\pi \cdot FN^2=\pi R^2-\pi \cdot FN^2$，即小圆柱的截面积与筒状圆柱的截面积(圆环)相等。于是得知挖去的圆柱与剩余的空心柱的体积也相等。此外，因“半球体

为长圆体三分之二，则癸乙己丙庚丁寅(NBDECAM)曲凹体为长圆体三分之一，与壬己庚(O—DC)尖圆体相等。”又以此推断得：“壬癸寅(O—NM)一段尖圆体与相当癸乙辰巳丁寅(NBLHAM)一段曲凹体亦必相等。”圆锥 O—NM 的体积为圆柱 JNMI 体积的三分之一，则 NBLHAM 一段曲凹体为筒状空心柱体的三分之一，二者之和为 BLHA 一段圆柱体体积的三分之一。在 BLHA 圆柱体内挖去圆锥 O—NM，再截去 NBLHAM 一段曲凹体，则得到一个球扇形(原文称为“空心球体”)，此球扇形体积为 BLHA 圆柱体积的三分之二，且“必与乙辰壬巳丁(BLOHA)一段空心长圆体(中空圆柱体)等。”再进一步“将此两空心体从壬心(O)至外面剖为千万尖体，俱以乙壬(BO)半径为高，以两空心体外面为底。”而“千万尖体之底，即两空心体之面也。”由于球扇形与中空圆柱的体积都可以看作是以球半径为高的无数小锥体的极限和，又已知两种几何体的体积相等，所以得到两者之表面积也相等的结论。由此得知 BNMA 一段球面与对应的 BLHA 圆柱面的面积相等，再利用命题 4 的结果便可推得：“球体癸丙寅(NEM)一段凸面与长圆体辰己庚巳(LDCH)一段周围外面积相等。”

《数理精蕴》并没有对命题 5 的一般情形作出证明，但它的上述论证的思想方法和运用的几何模型却是很有启发性和创造性的。如果进一步加以推广和发挥，不但可以在此基础上证明 5 的一般结论，而且可以得到一系列有关球体积与表面积的命题。后来徐有壬的出色工作就是在此基础上完成的。如果将图 5a 中的 HFL 切割平面的位选择在一个一般位置上(图 6)，按照《数理精蕴》的思路则可证明命题 5。如图 6，因

$FN^2=OF^2=R^2-FN'^2$，则有 $\pi\cdot FN^2=\pi R^2-\pi\cdot FN'^2$

由此可知圆锥 O—CD 与曲凹体 N'BDECAM'在等高处的截面面积处处相等，因而曲凹体与圆锥体体积及其对应部分相等，而空心圆锥 O—N'LHM'的体积与 N'BLHAM'一段曲凹体的体积相等，因此可推得球扇形 O—BN'M'A 与中空圆柱 O—BLHA 体积相等。再应用极限方法则不难证明命题 5 的一般结论。实际上利用曲凹体模型可以推导并论证球体积公式，而且还可以推得一批关于球体积和表面积的结论。

《数理精蕴》下编卷二十六列有球体积与表面积的计算题，一般都是直接套用公式，其中计算球缺体积较为复杂，用了两种算法。我们仅作简要介绍。

《数理精蕴》的问题是，已知球缺的高 h 和底径 r，求球缺的体积(图 7)。

解法 1：先求球直径，球缺底面半径 H=r 是勾股形 PQG 斜边上的高，则有

$$r^2=h(2R-h),\quad 2R=\frac{r^2}{h}+h$$

球冠 TPQ 的表面积是以 PQ 为半径的圆的面积 $\pi(h^2+r^2)$；球扇形 O—TPQ 和圆锥 O—TQ 的体积为：

$$V_{球扇形}=\frac{1}{3}RS_{球冠}=\frac{1}{3}\left(\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2}\right)\cdot\pi(h^2+r^2)$$

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}(R-h)\cdot\pi r^2=\frac{\pi}{3}\left(\frac{r^2}{2h}-\frac{h}{2}\right)r^2$$

最后求得球缺体积为

$$V_{球台}=V_{球扇形}-V_{圆锥}$$
$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2}\right)(h^2+r^2)-\frac{\pi}{3}\left(\frac{r^2}{2h}-\frac{h}{2}\right)r^2$$

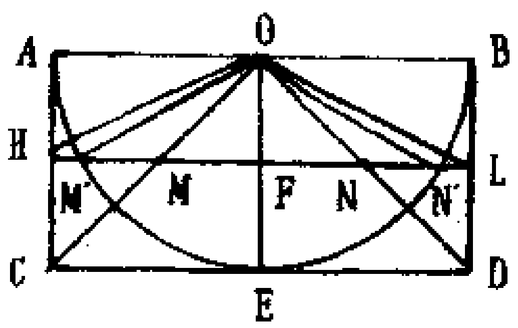


图 6

解法 2：先求球直径 $2R=\frac{r^2}{h}+h$

由命题 5 知，球冠 TPQ 的表面与球的外切圆柱体对应高度的侧面积相等，即

$$S_{球冠}=2R\pi h=\pi h(\frac{r^2}{h}+h)$$

再计算出球扇形 O－TPQ 和圆锥 O－TQ 的体积：

$$V_{球扇形}=\frac{1}{3}RS_{球冠}=\frac{1}{3}(\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2})\cdot\pi h(\frac{r^2}{h}+h)$$

$$V_{圆锥}=\frac{\pi}{3}(\frac{r^2}{2h}-\frac{h}{2})r^2$$

将两式相减即得球缺的体积。

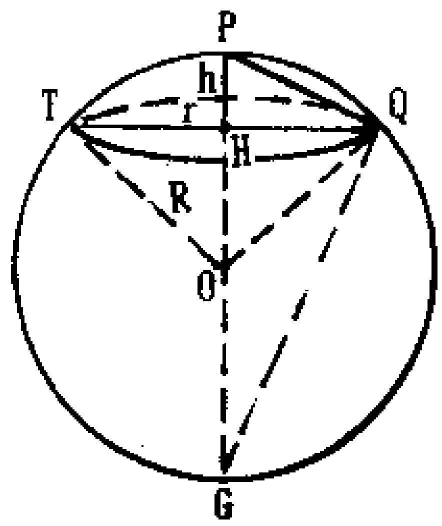


图 7

三

清代关于球体积与表面积命题的系统推导与论证，最后是由晚清时期的著名数学家徐有壬(1800－1860)完成的。徐有壬认为"《数理精蕴》谓球与同径同高之圆囷(圆柱)其外面皮积等，截球与截圆囷同高，则其外面皮积亦等，而不直抉其所必然。"而"遍检梅氏诸书亦未能明释之也，蓄疑于心久矣。近读李淳风九章注乃得其解，因释之，以告同志。"[6]他感到梅氏的《方圆幂积》以及《数理精蕴》在关键性问题上都有"未能明释"的缺陷，而读了李淳风注所引祖暅推导球体积公式的工作，才完全明白了其中的道理，因而对《数理精蕴》中的有关命题给出了合乎逻辑的证明。对于徐有壬推导有关球体积与表面积问题的主要结果和方法，沈康身先生已有过介绍，[7]这里我们对徐有壬证明有关命题的思想方法的来源及推证的过程作进一步的讨论。

《截球解义》证明了如下一些命题：[8]

命题 1　"径与高等之圆囷，内容同径之圆球，此球必居圆囷三分之二。"

命题 2　"球之外面皮积"与外切圆柱"之外面(侧面)皮积必等"。

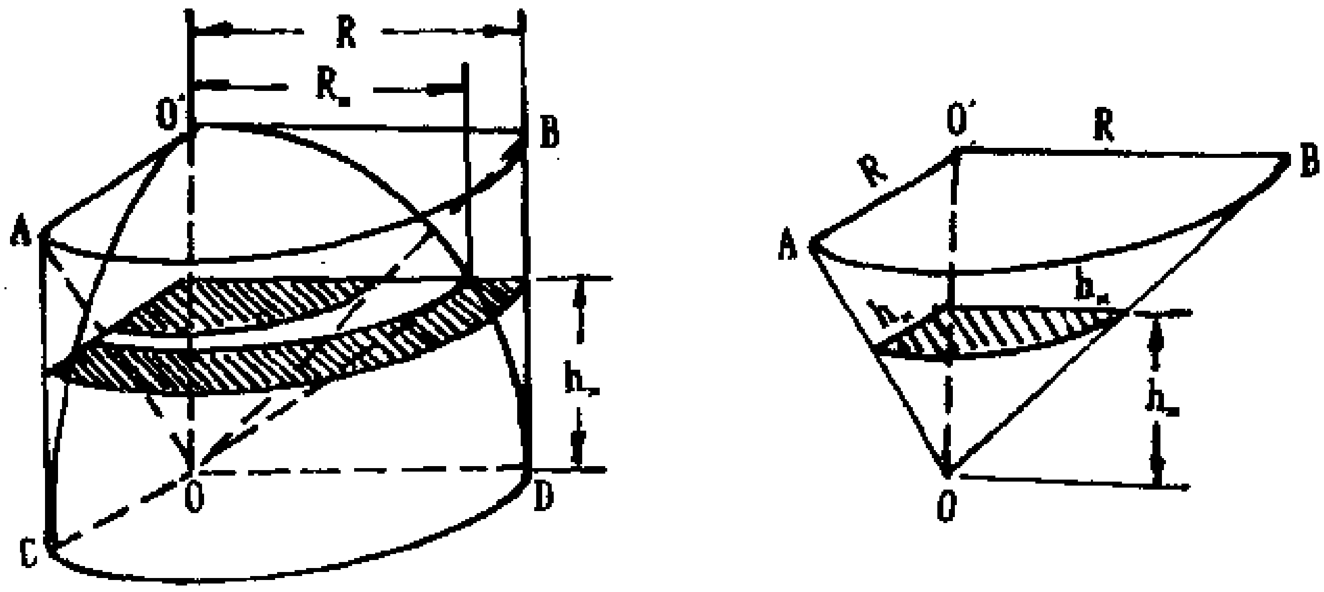
命题 3　球扇形体积是与其底面的高对应高度相等的球之外切圆柱体积的三分之二。

命题 4　球带的面积(原文称为截球之外面皮积)等于同高球外切圆柱的侧面积。

推　论 球带的面积等于球带的高与球大圆周长的乘积。

命题 5　球冠的面积(原文称为球盖之外面皮积)等于球冠的高与球大圆周长的乘积。

徐有壬对命题 1 给出了较为严格的理论证明。证明是以祖暅所运用的原理为基础的，同时巧妙地运用了《数理精蕴》中所提出的辅助几何模型。他指出："盖淳风用方，今用圆，其理则无二也。"他应用的几何模型较"牟合方盖"简单，而推导证明过程也更为简洁，带有明显的中国传统色彩。他从考察球与外切圆柱体的关系入手，"将圆囷横切为二，则扁圆囷，内容半圆球，又将扁圆囷十字直切为四，则为圆囷八分之一，内亦容球八分之一。"他选取圆柱及其容球的八分之一为考察对象，用高为 h_k 的截面截割这两个几何体，如图 8，其截面关系为：



(a)　　　　(b)

图 8

圆柱截面积＝环形面积＋球截面面积

环形面积实际上就是《数理精蕴》所说提曲凹体的截面面积，其值正好与圆锥 O－AB 在等高处的截面面积相等。环形面积为 $\pi R^2-\pi R_x^2$，而 $h_x^2=R^2-R_x^2$，因而有 $\pi R^2-\pi R_x^2=\pi h_x^2$。徐有壬以倒立的底径与高都等于球半径的圆锥（图 9b）为辅助几何体，应用祖暅原理得出结论："球与圆囷相较，必少一锥体矣，是故一锥一球相并，必与圆囷等，而锥居囷三分之一，球必居囷三分之二矣。"他用曲凹体与倒立的圆锥代替祖暅的"方盖差"与倒立的阳马为辅助几何体，[8]，实际上省去了"牟合方盖"这一中介工具，因而推导过程十分简单。

关于命题 2，徐有壬论证说："囷之求积，以囷之外面皮积为底、以半径为高作立方，为囷之两倍。球之求积，以球之外面积为底、半径为高作立方为球之三倍。今既知球之三倍、囷之两倍为相等，则两立方等矣，……故球之为面积与囷之外面皮积必等。"也就是

外切圆柱体积＝侧面积×R÷2

内容球体体积＝球表面×R÷3

由命题 1 的结果可推得：球表面积等于外切圆柱的侧面积。

对于命题 3，徐有壬主要推导并证明了以大圆为下侧面的球扇形体积公式。徐氏将这种球扇形称为"空中如碗，外面则上小下大"的"圆球截积"。如图 9，以先挖去一象限圆锥 V_2，此圆锥"以正弦（R_x）为半径，以余弦（h_x）为高，是为内锥"。后"将截球壳外圆囷所多之积（V_3）割出，准前论，知此亦为一象限锥。此锥以大象限（球半径为半径）、小象限（截球正弦为半径）之面积较为底，亦以余弦为高，是为外锥。"徐有壬根据前面的结果得知，曲凹体 V_3 的体积等于以（$\pi R^2-\pi R_x^2$）为底、h_x 为高的圆锥的四分之一。因此"内锥、外锥相并为一大锥（V_4），亦以余弦为高，而以大象限（大圆的四分之一）为底，"即 $V_2+V_3=V_4$。而 V_4"必为原截体（V_1）三分之一，所余者必为三分之二矣。"最后徐氏总结说："圆球截积，必居圆囷三分之二，"即

$$V_{球扇形}=\frac{2}{3}\pi R^2h$$

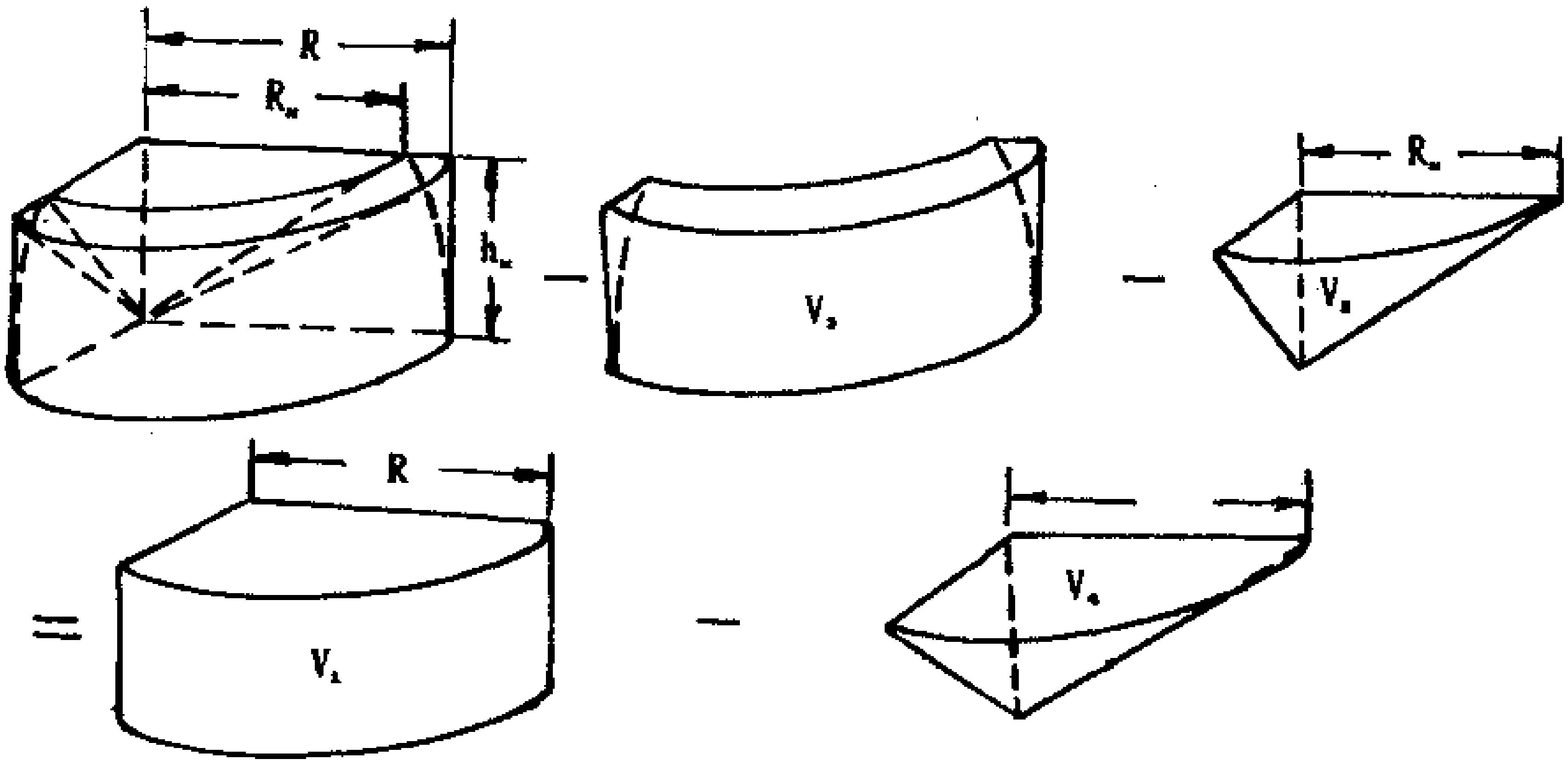


图 9

求出以大圆为下侧面的球扇形体积后，就可通过简单的加减运算求得第一种球扇形(以球冠为底)的体积，也容易获得一般的球扇形体积公式。

关于命题 4，徐有壬的论证方法与命题 2 的思想方法是一致的。因

球扇形体积＝球扇形底(球带)面积×R÷3

同高球外切圆柱体积＝侧面积×R÷2

应用命题 3 可推得：球带面积等于同高球外切圆柱的侧面积。

命题 5 可由命题 4，2 直接推得。也可用类似推导命题 4 的方法获得。他说："上截球盖之外面皮积即矢乘周也，"其理由是："矢乘周又乘半径为锥积之三倍。"这相当于

$$球扇形体积 = \frac{2}{3}\pi R^2 h = 2\pi Rh \cdot R \div 3$$

这里他把 $2\pi R$(周)与 h(矢)的乘积看作球扇形的底即球冠的面积。

应该指出，以上命题 4，5 及 2 中的几何体表面积推导过程的思想是一致的，都归结为：这些几何体体积是以球表面积为底、球半径为高的锥体积，而球、球扇形体积均可算出，因此所求表面积也不难解决。梅文鼎与《数理精蕴》都从极限思想讨论过如下命题："球(或球扇形)的体积与一个圆锥的体积相等，该圆锥的底面积与球表面积(或球扇形的底面积)相等，高为球的半径。"徐有壬直接应用此命题，自然是接受了以前的论证，因而可以认为他的理论根据也是以极限思想为基础的。

徐有壬还给出求积四术，即"球径求积术"、"球径求壳积术"、"截球余弦求截球积术"和"截球矢求截球上盖积术"。这里我们介绍后两术：球台与球缺体积公式。

"截球余弦求截球积术"给出了以球的大圆的下底面的球台的体积算法。徐氏说："余弦(即球台高 h)乘周，又乘半径，为截球碗积(球扇形)之三倍。半径自乘内减余弦自乘，余为正弦

(球台上底半径 r)，求其圆面，又乘余弦，为截球内锥之三倍。"也就是：

$$3V_{球扇形}=h\cdot 2\pi R\cdot R,\ 3V_{内锥}=h\cdot(R^2-h^2)\pi$$

而 $V_{球扇形}$ 与 $V_{内锥}$"两积相并为截球积"，也即

$$V_{球台}=V_{球扇形}+V_{内锥},\ =h\cdot 2\pi R\cdot R-h\cdot(R^2-h^2)\pi$$

"截球矢求截球上盖积术"给出的是已知球缺高为 h、球半径为 R 时的球缺体积公式。他把球看作是球扇形体积与圆锥体积的差。也就是

$$3V_{球扇形}=h\cdot 2\pi R\cdot R,\qquad 3V_{圆锥}=\pi r^2\cdot h=\pi\cdot h(2R-h)\cdot h$$

而"两锥相减余为盖积"，即

$$V_{球缺}=V_{球扇形}-V_{圆锥}=h\cdot 2\pi R\cdot R-\pi\cdot h(2R-h)\cdot h$$

由以上所述可以看到，徐有壬不但对球体积公式作出了出色的证明，而且还推导出了球扇形、球台、球缺等体积公式以及一连串关于球及其部分的表面积公式。他把这些问题统一处理，取得了良好的结果，比较圆满地解决了清初数学家提出的有关命题。他的工作具有逻辑性与系统性强、推导过程简捷的特点。徐有壬吸收了前人和古代数学的优秀成果，又有所创新，所以在中算史上使这方面的研究达到完善的境地。

参 考 文 献

〔1〕 梅文鼎:《方圆幂积》,《梅氏丛书辑要》卷二十四。

〔2〕 梅文鼎:《堑堵测量》,《梅氏丛书辑要》卷二十九。

〔3〕 丁韪良:《格物测算》卷一，1883 年。

〔4〕 清圣祖敕编:《数理精蕴》上编，卷二，国学基本丛书本。

〔5〕 同上，卷三。

〔6〕〔8〕 徐有壬:《截球解义》,《务民义斋算学》，丛书集成初编本。

〔7〕 沈康身:"我国古代球体几何知识的演进",《科技史文集》第 8 辑，上海科技出版社，1982 年。

时曰醇《百鸡术衍》研究

李兆华

（天津师范大学　数学系）

《张丘建算经》百鸡问题的研究至清代骆腾凤(1770—1841)、丁取忠(1810—1877)已经取得较大的进展。前者用孙子定理求解[1]，后者设一物为零用二色差分术求解[2]。两者的方法虽不同而原理一致。时曰醇吸取两者特别是后者的方法并加以改进，对百鸡问题进行了系统的研究，著《百鸡术衍》二卷。

时曰醇，字清甫，世为嘉定(今上海嘉定县)人。其父时铭(1768—1827)，嘉庆乙丑(1805)科进士，嘉庆十九年(1814)补齐东县(今山东邹平县境内，已废)，道光元年(1821)"以催科不力劾罢"，道光七年(1827)卒于济南寓邸。数学著作有《笔算筹算图》一卷[3]。时曰醇的生卒年代不见于数学史专著。今据《嘉定县志》本传知"光绪庚辰(1880)卒，年七十四"[4]。由此推得其生年为1807年。少时"入监，专治九数"。咸丰辛酉(1861)，丁取忠在武昌为湖北巡抚胡林翼(1812—1861)的幕宾。是年春，时曰醇与丁氏同客武昌商榷百鸡术，"别后数月乃得通之"。同年重九日，时氏序成《百鸡术衍》二卷[5]。晚年被聘入广方言馆①。其时虽已"年老聋瞽"，仍为"诸生口讲指画，剖毫析芒"。时氏的著作还有《今有术申》一卷，《求一术指》一卷，而《百鸡术衍》二卷为其代表作。

前此，笔者对《百鸡术衍》解题方法的讨论尚有谬漏[6]。本文拟从解题方法与造题方法两个方面对该书作进一步探讨，以期获得比较系统的认识。

一　内容梗概

《百鸡术衍》二卷是关于三色差分的著作。全书共二十八题，以"旧学商量加邃密，新知培养转深沉"十四字为序，每序有上下题。上题的旧学商三题题各成组，量加、邃密新、知培养转深沉各成一组(简称为二上、三上、六上题)，共为六组。相应的下题亦分别成组，仍为六组。诸上题是形如

$$\begin{cases} x+y+z=M \\ \frac{b}{a}x+\frac{d}{c}y+\frac{f}{e}z=nP \end{cases}$$

的三元一次不定方程组。其中，a，c，e分别是大物，中物，小物的物数，b，d，f分别是其相应的值钱数，M为共物，nP为共值。a，c，e，b，d，f，M，nP皆为正整数，且$(a,b)=(c,d)=(e,$

① 疑即上海广方言馆，1863年设。

$f)=1$，$\frac{b}{a}>\frac{d}{c}>\frac{f}{e}$。相应的下题具有如下的形式：

$$\begin{cases} x+y+z=nP \\ \frac{e}{f}x+\frac{c}{d}y+\frac{a}{b}z=M \end{cases}$$

其中，f，d，b 为物数，e，c，a 为值钱数，nP 为共物，M 为共值。$\frac{e}{f}>\frac{c}{d}>\frac{a}{b}$。其余条件同上题。通过对全书的考察可知，$P$ 是$\frac{M}{(a,c,e,M)}$的最小素因子，n 是正整数，依赖于 b，d，f。每组上题所给物数相同，值钱数不同；每组下题所给值钱数相同，物数不同。每题用方程术与求一术两法求解。方程术又分为"用大数求"、"用小数求"两法，求一术又分为"中大较大小较相求"、"大小较中小较相求"两法。时氏所用求一术法与骆腾凤法同。此法只是"随题并述以博其趣"。方程术为时氏本法。书中每题有且仅有三组正整数解，一本张丘建旧例。

二　解题方法

时氏的三色差分解法，步骤明确，通行于全书二十八题。兹录知上题原文，试以分步今译，列表对照，说明其解法。

原　文	今　译
设甲物大二十八，值五。中六十三，值八。小二十一，值二。共物一千四百六十三，共值一百八十七。问物大、中、小各几何。 答曰：略。	设大、中、小物数各得 x，y，z。依题可得 $\begin{cases} x+y+z=1463 & (1) \\ \frac{5}{28}x+\frac{8}{63}y+\frac{2}{21}z=187 & (2) \end{cases}$
物率：大二十八约为四，中六十三约为九，小二十一约为三(以等七相约得)。	物数之等除物数。 $d_1=(28,63,21)=7$ 物率：4，9，3
值乘率：中小物率九三相乘得二十七约为九，大小物率四三相乘得一十二约为四，大中物率九四相乘得三十六约为一十二(以等三相约得)	值乘数之等除值乘数。 $d_2=(27,12,36)=3$ 值乘数：9，4，12
约率：大小较二十一，中小较八，中大较一十三(以乘率九乘大值，乘率四乘中值，乘率一十二乘小值，相	值乘率：9，4，12　值率：5，8，2 相　乘：45，32，24 大减小，中减小，大减中得①。

① 相减结果如有公因数须约去。如转上等题。

减而得)。 通率：大小较四百四十一，中小较一百六十八，中大较二百七十三(以三物之等七，三值乘率之等三，通约率得之)。	约率：大小较 21，中小较 8，中大较 13 $d_1=7$、$d_2=3$ 相乘得 21，分别乘约率三较得。 通率：大小较 441，中小较 168，中大较 273
如方程，用大数求。 (原文算式从略)	设 $z=0$，则 $\begin{cases} x+y=1463 & (3)\\ \frac{5}{28}x+\frac{8}{63}y=187 & (4)\end{cases}$ 令 $x=28u$，$y=63v$ 则 $\begin{cases} 28u+63v=1463 & (右)\\ 5u+8v=187 & (左)\end{cases}$
以左行首位大值五遍乘右行。右行首位大二十八遍乘左行。上余九十一为法，下余二千〇七十九为实。	$\begin{cases} 140u+315v=7315 & (右)\\ 140u+224v=5236 & (左)\end{cases}$ 相减得，$91v=2079$
法九十一与中分母六十三求等得七。约六十三得九为乘率，亦约法九十一为一十三。以除实二千〇七十九，得一百五十九，不尽一十二。分母子无等不约，仍通内为二千〇七十九。以乘率九乘，得一万八千七百一十一为通分中物。	$91\times\frac{y}{63}=2079$，$13\times\frac{y}{9}=2079$， $\frac{y}{9}=\frac{2079}{13}$，$y=\frac{18711}{13}$， 18711 为通分中物。
亦以法一十三通总物一千四百六十三为一万九千〇一十九，而以所通中物减之，余三百〇八为通分大物。	由(3)，$x=1463-y$ $=\frac{19019-18711}{13}=\frac{308}{13}$ 308 为通分大物。
复以法除通分中物，得中物一千四百三十九，不尽四。分母子无等不约，仍通内为一万八千七百一十一。依法求中数减较。置大小较二十一，先去其四，递加至七较而除之适尽。	$y=\frac{18711}{13}=\frac{13\times1439+4}{13}$ 不得整数。求减较次数：因 $\frac{13\times1439+(7\times21-4)}{13}$ 得整数，故 $\frac{13\times1439-(7\times21-4)}{13}$ 得整数。减较 7 次。

乃七因大小较二十一得一百四十七以减中，七因中小较八得五十六以加大，七因中大较一十三得九十一以加小。得通分中物一万八千五百六十四，通分大物三百六十四，通分小物九十一。	$y=\frac{18711-7\times21}{13}=\frac{18564}{13}$ $x=\frac{308+7\times8}{13}=\frac{364}{13}$ $z=\frac{0+7\times13}{13}=\frac{91}{13}$ 通分中物 18564，通分大物 364，通分小物 91。
复以法各除得中物一千四百二十八，大物二十八，小物七。	$y_0=1428$ $x_0=28$ $z_0=7$
验小物七不应小分母二十一，依法求加较。以小加率中大较一十三递加至十四较而应分母①。	将这组值代入(2)，y、z 项皆不得整数。用 z 项求加较次数。因 $\frac{7+14\times13}{21}$ 整数，故加较 14 次。
乃以一十四乘大小较二十一得二百九十四，减中；乘中小较八得一百一十二，加大；乘中大较一十三得一百八十二，加小。得中物一千一百三十四，大物一百四十，小物八十九，为一答。	$\begin{cases}y_1=y_0-14\times12=1134\\x_1=x_0+14\times8=140\\z_1=z_0+14\times13=189\end{cases}$ 为一答。
又以通率大小较四百四十一，减中；中小较一百六十八，加大；中大较二百七十三，加小，而得又答。	$\begin{cases}y_2=1134-441=693\\x_2=140+168=308\\z_2=189+273=462\end{cases}$ $\begin{cases}y_3=693-441=252\\x_3=308+168=476\\z_3=462+273=735\end{cases}$ 为又答。

由上述解法可知，时氏求解三色差分的基本思想方法是，减少题目未知数的个数使不定解的问题化为确定解的问题而后求解。其具体步骤可概括如下。先设一物为零使三色差分化为二色差分，借方程术解得一组解。次由约率加减得一组非负整数解。复由约率加减得一组正整数解使其对应的值钱数亦皆为正整数。更由通率加减得其全部正整数解。该法的关键是

① 原文"母"字下有八十字夹注，附记中增改为一百六十二字。注文以计算结果说明本题"必用小分子七于小物求加而不用中分子于中物求减"。结论正确。事实上，因 21 是 3 和 7 的最小公倍数，使 $\frac{7+m\cdot13}{21}$ 为整数的 m 必使 $\frac{28+m\cdot8}{28}$ 和 $\frac{1428-m\cdot21}{63}$ 或即 $\frac{7+m\cdot2}{7}$ 和 $\frac{68-m}{3}$ 为整数。反之不然。

正确地求出约率与通率。

三　约率与通率

时氏求约率的方法是正确的。设大物、中物、小物的单价$\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$，$\frac{f}{e}$满足本文第一节的条件，则时氏求约率的方法可概括如下。将三数通分，取其分子 bce，ade，acf。两两相减得 $bce-acf$，$ade-acf$，$bce-ade$。令其最大公约数为 D，则$\frac{bce-acf}{D}$，$\frac{ade-acf}{D}$及$\frac{bce-ade}{D}$分别是大小较，中小较及中大较。事实上，大、中、小三物不可能同增或同减，只能是二增一减或二减一增。不失一般性，设二增一减。可以证明，只有大、小增，中减这种情况存在。设大物增 s，小物增 t，则中物必减 $s+t$(s,t 为正整数)。又三物单价分别为$\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$、$\frac{f}{e}$。故有$\frac{b}{a}s+\frac{f}{e}t=\frac{d}{c}(s+t)$。整理得$(bce-ade)s=(ade-acf)t$。因$(bce-ade,\ ade-acf)=(bce-ade,\ ade-acf,\ bce-acf)=D$，故$\frac{bce-ade}{D}s=\frac{ade-acf}{D}t$。由此，$s=\frac{ade-acf}{D}$，$t=\frac{bce-ade}{D}$，$s+t=\frac{bce-acf}{D}$。

同样地，时氏求通率的方法也是正确的，即可使(2)式左端各项分别为正整数。记物数之等 $d_1=(a,c,e)$。由物数中约去 d_1 得物率 a'，c'，e'。记值乘数之等 $d_2=(c'e',a'e',a'c')$。时氏通率分别为大小较 $d_1d_2(s+t)$，中小较 d_1d_2s，中大较 d_1d_2t。事实上，记约率各较与各物相约$\frac{s+t}{c}$，$\frac{s}{a}$，$\frac{t}{e}$的结果为$\frac{(s+t)'}{c''}$，$\frac{s'}{a''}$，$\frac{t'}{e''}$，则可以证明：i) a''、c''、e''中至少有一个数是这三个数的最小公倍数；ii)这个最小公倍数等于物数之等与值乘数之等的积 d_1d_2。不失一般性，记 $e''=[a'',c'',e'']=d_1d_2$①，一如第二节译文所记，由第二次加减较所得一答 $y_1=y_0-m(s+t)$，$x_1=x_0+ms$，$z_1=z_0+mt$ 必使(2)式左端各项分别为正整数。此时，$y=y_1-d_1d_2(s+t)$，$x=x_1+d_1d_2s$，$z=z_1+d_1d_2t$ 亦必使(2)式等号左端各项分别为正整数。实因$\frac{d}{c}y=\frac{d}{c}[y_1-d_1d_2(s+t)]=\frac{d}{c}y_1-dd_1d_2\frac{s+t}{c}=\frac{d}{c}y_1-dd_1d_2\frac{(s+t)'}{c''}>0$。其中，$\frac{d}{c}y_1$ 为正整数，又，$d_1d_2=[a'',c'',e'']$，$dd_1d_2\frac{(s+t)'}{c''}$为正整数。故$\frac{d}{c}y$ 为正整数。同理，$\frac{b}{a}x$、$\frac{f}{e}z$ 皆为正整数。

约率与通率的应用与所给物数是否两两互素有关。约率即《张丘建算经》中的"增减率"。当所给物数 a、c，e 两两互素时，由第一次加减较所得解不可能"与某物分母不相应"。该解即为所求一答，无须第二次加减较。同时，$d_1=d_2=1$，通率与约率相等，无须求通率。用约率与一答加减即得又答。当 a，c，e 非两两互素时，由第一次加减较所得解可能"与某物分母不相应"。若然，该解不是所求一答，须由第二次加减较求其一答。同时，$d_1\neq1$，$d_2\neq1$ 两者中至少有一种情形存在，应求通率。用通率与一答加减求其又答。

由本文第二节、第三节可以看到，时氏求解三色差分的方法是完整的、正确的。

---

① 判别 a''、c''、e''何者满足此式直接关系到第二次加减较次数的计算。参见如上题。

四　造题方法探讨

如何造出二上、三上、六上这三组题及其相应的下题是探讨造题法的关键。显然，如本文第一节所示，对于给定的上题，颠倒分子、分母，对换 x、z 的系数，又对换两个方程的常数项即得到其相应的下题。问题是如何构造这三组上题①。可以看到，每组上题各有一题共物与共值相等(与"百鸡百钱"同类型)而其余各题共物与共值不等。每组上题之各题第一个方程相同，第二个不同。每组上题的物数答案相同。考察每组上题发现，由该组中的共物共值相等一题可导出该组中其余各题。兹以知上题的导出为例探讨时氏的造题方法。

即由沉上题

$$\begin{cases} x+y+z=1463 \\ \frac{55}{28}x+\frac{62}{63}y+\frac{8}{21}z=1463 \end{cases}$$

导出知上题

$$\begin{cases} x+y+z=1463 \\ \frac{5}{28}x+\frac{8}{63}y+\frac{2}{21}z=187 \end{cases}$$

或依时法令 $x=28u$，$y=63v$，$z=21w$ 由

$$\begin{cases} 28u+63v+21w=1463 & (1) \\ 55u+62v+8w=1463 & (2) \end{cases}$$

导出

$$\begin{cases} 28u+63v+21w=1463 & (3) \\ 5u+8v+2w=187 & (4) \end{cases}$$

该两题中，(1)，(3)相同。因此，只须由(1)，(2)导出(4)即可。

Ⅰ　设所求(4)为

$$bu+dv+fw=nP \qquad (5)$$

取 $P=11$② 代入(5)，得

$$bu+dv+fw=11n \qquad (6)$$

Ⅱ　解(1)，(2)得 $u=5$，$v=18$，$w=9$。代入(6)，得

$$5b+18d+9f=11n \qquad (7)$$

Ⅲ　求 b，使$(28, b)=1$。得 $b=1,3,5,\cdots\cdots,55,\cdots\cdots$。

求 d，使$(63, d)=1$。得 $d=1,2,4,\cdots\cdots,122,\cdots\cdots$。

求 b，d，使$\frac{b}{27}>\frac{d}{63}$。

得 $b=1$　　$b=3$　　　　$b=5$　　　　　　　至$b=55$

① 每组可化为同一个二元一次不定方程。二上、三上、六上可分别化为 $9x+y=279$，$13x+3y=3456$，$21x+8y=12012$。

② $1463=7\times11\times19$。先约去$(28, 63, 21, 1463)=7$，得 11×19。保留最小素因子11。参见本文第一节。

$d=1,2$　　$d=1,2,3,4$　　　$d=1,2,4,5,8,10,11$　　　　　$d=1,2,4,\cdots\cdots,122$

Ⅳ　求 f。将 b、d 值依次代入(7)。当 $b=5$，$d=8$ 时，

$$f=\frac{11n-5b-18d}{9}=\frac{11n-169}{9}$$

用"加较法"，16 次加 11。即 $n=17$ 时，得最小正整数 $f=2$。

Ⅴ　检验 f，是否满足 $(21,f)=1$。$f=2$ 满足。检验 f，是否满足 $\frac{8}{63}>\frac{f}{21}$。$f=2$ 满足。故 $b=5$，$d=8$，$f=2$，$n=17$ 为所求。代入(6)得

$$5u+8v+2w=17\times11=187$$

由此得

$$\begin{cases}28u+63v+21w=1463 & (8)\\ 5u+8v+2w=187 & (9)\end{cases}$$

Ⅵ　检验(8)，(9)是否与(1)，(2)"同解"(物数答案相同)。同解。故(8)，(9)为所求。将 $u=\frac{x}{28}$，$v=\frac{y}{63}$，$w=\frac{z}{21}$ 代入，即得知上题。

如将 b，d 值依次代入(7)至 $b=55$，按Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ演算，可得六上题中的全部六个题。兹将计算结果列如下表。

题＼值	b	d	f	n	(6)
知上	5	8	2	17	$5u+8v+2w=17\times11$
转上	25	40	10	85	$25u+40v+10w=85\times11$
培上	29	62	20	131	$29u+62v+20w=131\times11$
养上	33	71	23	150	$33u+71v+23w=150\times11$
深上	47	83	23	176	$47u+83v+23w=176\times11$
沉上	55	62	8	133	$55u+62v+8w=133\times11$

上表六题的导出顺序与时著原序略有不同。此表中，转上题在知上题之后，时著安排在养上题之后，其余各题顺序不异。由此推测，上述的造题方法与时氏原法相去不远。这种方法以大量的试算为基础。以六上题为例，当 b 取到 55 时，满足条件Ⅲ的 b，d 共有 927 种情形，即需试算 927 次①。

既然同解的题目可由组中共物共值相等的一题导出，那么，进一步的问题是如何构造出共物共值相等的这一题目。质言之，已知三物之数分别是 a，c，e，对应的值钱数分别是 b，d，f 满足本文第一节上题条件，求形如

① 本文只试算了一部分。因而 927 种情形中是否只有 6 个"同解"的题目尚不能肯定。同样的方法可用于二上题、三上题。满足条件 $(a,b)=1$，$(c,d)=1$，$\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$ 的 b，c，对二上题当 b 取至 4 时，共 10 种情形，对三上题当 b 取至 17 时，共 18 种情形，同解的题目，前者只有 2 题，后者只有 3 题，时氏无遗漏。

$$\begin{cases} x + y + z = M, \\ \frac{b}{a}x + \frac{d}{c}y + \frac{f}{e}z = M \end{cases}$$

或即

$$\begin{cases} au + cv + ew = M & (10) \\ bu + dv + fw = M & (11) \end{cases}$$

的三元一次不定方程组使有且仅有三组正整数解，其中 M 是正整数。以时著所使用的方法构造这一问题并不困难。由(10)，(11)消去 M 得

$$(a-b)u + (c-d)v + (e-f)w = 0 \qquad (12)$$

求出它的一组解，以 v，u，w 的增减率调整这组解使(10)，(11)仅有三组正整数解，任取一组解代入(10)可得 M。以构造沉上题为例。

Ⅰ　求出一组解。

将 $a=28$，$c=63$，$e=21$；$b=55$，$d=62$，$f=8$ 代入(10)，(11)，得

$$\begin{cases} 28u + 63v + 21e = M & (13) \\ 55u + 62v + 8w = M & (14) \end{cases}$$

两式相减得

$$-27u + v + 13w = 0 \qquad (15)$$

$$u = \frac{v + 13w}{27}$$

令 $v=1$，$w=2$，得 $u=1$ 为一组解。

Ⅱ　求 v，u，w 的增减率。

	中	大	小
通率	441	168	273
物数	63	28	21
相除	7	6	13

即 v，u，w 的增减率分别为 7，6，13。

Ⅲ　以 v，u，w 的增减率调整所得解。

$v=1$，$u=1$，$w=2$ 调整为 $v=11$，$u=11$，$w=22$。v 减 7，u 增 6，w 增 13；v 增 7，u 减 6，w 减 13。共得下列三组解①：

$$\begin{cases} v = 18 \\ u = 5 \\ w = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} v = 11 \\ u = 11 \\ w = 22 \end{cases} \quad \begin{cases} v = 4 \\ u = 17 \\ w = 35 \end{cases}$$

Ⅳ　求 M。

上列三组解任选一组代入(13)即可。例如，

$$M = 28u + 63v + 21w = 28 \times 5 + 63 \times 18 + 21 \times 9 = 1463。$$

故

---

① 这三组解即六上题三组答数之后的夹注"计得五大一十八中九小"，"计得一十一大一十一中二十二小"，"计得一十七大四中三十五小"。

$$\begin{cases} 28u + 63v + 21w = 1463 & (16) \\ 55u + 62v + 8w = 1463 & (17) \end{cases}$$

为所求，或即

$$\begin{cases} x + y + z = 1463 \\ \frac{55}{28}x + \frac{62}{63}y + \frac{8}{21}z = 1463 \end{cases}$$

此即沉上题。

依时氏解题步骤先得第一组解。此时 $v=18$，减二较得 $v=4$ 为正，u，w 各加二较亦皆为正。如减三较则 v 为负。如 $v=18$ 加一较则 u，w 各减一较皆为负。故只能 $v=18$ 减二较，u，w 各加二较，仅有三解。由此，沉上题有且仅有三组正整数解。由上述过程可见，(15)的任一组解 $v=1$，$u=1$，$w=2$ 分别乘以常数 $K=11$，从而得到上述第二组解。事实上，K 的取值有一定的灵活性。对本题而言，依中物 v"一加一减"决定其它两解的方法，只要正整数 K 满足 $8\leqslant K\leqslant 13$，那么所得不定方程组均有且仅有三组正整数解。此时 M 随 k 变化。$K=11$ 是这个区间的最小素数。故 M 中也含有这个素因子①。

依本节所述方法，只要给出一组数 a，c，e；b，d，f 满足本文第一节(上题)条件，依法即可造出两组三色差分，一组同解，一组对称。②。

综上可知，《百鸡术衍》给出三色差分的解题方法与造题方法并在这两个方面多所创新。时氏采用丁取忠设一物为零的方法，所得二色差分借用梅文鼎(1633—1721)《方程论》(1672)的方法求解[7]，较二色差分本法简明，又首创约率简便算法、通率及其算法、加较减较法。由这些继承与创新的方法构成三色差分的严谨的解法。作为三色差分的最早记载的百鸡问题所给物数两两互素且共物与共值相等。时氏去掉了这些限制使之一般化，进而揭示了"同解"的与"对称"的三色差分，从而提供了构造三色差分的一般方法。时氏之前的研究，基本上是就题论题，未曾达到如此全面细致。《百鸡术衍》二卷可视为三色差分的系统总结。书中需要求解形如 $\frac{c+ax}{b}=y$ 的不定方程。时氏未能采用简便方法而代之以试算，失之简捷。黄宗宪《求一术通解》(1874)彻底解决了这一问题[8]。陈贤佑《增补百鸡术衍》(1896)也对时著提出了补充意见[9]。

时氏的工作说明，中国传统数学的三色差分与西方数学的二元一次不定方程是既有联系又有区别的两个概念。显然，一个三色差分可以归结为一个二元一次不定方程。但是，二元一次不定方程的正整数解未必是三色差分的解。原因在于，三色差分要求对应的值钱数也是正整数。是故有第二次加减较与通率之设。当且仅当所给物数两两互素时二者的物数答案相同。由此可见，中国传统数学的三色差分较之西方数学的二元一次不定方程具有更丰富的数

---

① 适当地选择(12)的一组解和常数 K 既可使(10)、(11)有且仅有三组正整数解又可使 M 巧妙。如百鸡问题(12)为 $u=\frac{-v+w}{2}$，取 $v=1$，$u=3$，$w=7$，$K=4$ 则 $M=100$。

② 依法可造出百鸡问题($a=c=1$，$e=3$；$b=5$，$d=3$，$f=1$，当 $b\leqslant 5$ 是正整数时）及同解三色差分 $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x+2y+\frac{2}{3}z=100 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 4x+3y+\frac{5}{3}z=200 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+4y+\frac{8}{3}z=300 \end{cases}$ 由此可得对称四题。

学内容。

参考文献

[1] 骆腾凤:《艺游录》卷二。道光二十三年刊本。
[2] 丁取忠:《数学拾遗》。白芙堂丛书本。
[3] 李兆洛:《养一斋文集》卷十四,齐东县知县时君传。光绪四年重刊本。李俨近代中算著述记所记时铭生年与著作与此略有出入。
[4] 《嘉定县志》卷十九。光绪七年刊本。
[5] 时曰醇:《百鸡术衍》自序。白芙堂丛书本。以下引用该书皆据此本,不另注出。
[6] 李兆华:关于差分术的几个问题,自然科学史研究,1989年第2期。
[7] 梅文鼎:《方程论》卷二,化整从零法。梅氏丛书辑要本。
[8] 黄宗宪:《求一术通解》卷上。白芙堂丛书本。
[9] 陈贤佑:《增补百鸡术衍》十六卷。光绪二十五年刊本



著名数学家陈建功*

骆祖英
（浙江师范大学）

一　生平事迹

陈建功1893年9月8日出生于浙江绍兴城内一个小职员家庭。父亲陈心斋，母亲鲁氏，兄弟姐妹七人，排行老大。靠父亲一人在慈善机构同仁局里当差维持生计，生活十分拮据。念完私塾和本地中小学之后，1910年考入杭州两级师范读书，偏爱数学。毕业后的1913年，

* 本文得到中国科学院数学所开放所的支持。

写作中得到北大程民德、数学所李文林、应用所越民义、复旦郭毓驹、同济吴卓人、杭大王斯雷、沈康身、陈全德、浙师大徐士英诸位教授和陈先生亲属陈翰麟、陈翰馥研究员的指导与帮助，特此一并致谢。

选择了官费留日的道路，进了日本东京高等工业学校染色科，同时考入东京物理学校夜校部学数学。白天读化工，晚上学数理。1918 到 1919 两年从两校相继毕业，学成归国，回浙江甲种工业学校教染织，业余时间钻研数学。1920 年二次东渡，进了东北帝国大学数学系。大学一年级便发表了第一篇论文："关于无穷积的一些定理"，被苏步青誉为："一篇具有重要意义的创造性著作，无论在时间上或质量上，都标志着中国现代数学的兴起。"[1]。1923 年毕业后仍回到浙江工业专门学校教数学，翌年应聘为武昌大学教授。1926 年，他三次东渡，进入东北帝国大学研究生院做研究生，受导师藤原松三郎指导研究三角级数论。1928 年他证明了：H. Rademacher 关于一般正交系$\{\varphi_n(x)\}$概收敛条件与 Д. Е. Меньшов、S. Borger 和 S. Kaczmarz 给出的概收敛条件的等价性，从而说明了正交函数级数的概收敛问题可以转化为级数求和及部分和子列的概收敛问题。他相继发表文章，对黎斯典型平均问题和正交函数级数勒贝格函数阶的估计等都给出了新的结果。仅用两年半时间，便在日本四家期刊上发表了十余篇论文。特别是 1928 年发表在《日本帝国科学院院刊》上的题为："论带有绝对收敛的富氏级数的函数类"一文，独立地给出了世称"哈代——李特伍特定理"的相同结论，震惊了世界数学坛，在完成了二百多页博士论文之后，通过论文答辩，获得了日本东北帝大博士学位，成了获得日本博士学位的第一个外国人。藤原教授托咐陈建功以专家身份为日本写一部《三角级数论》。陈建功经过反复斟酌，设计了一套被沿用至今的日文数学术语，写出了日文第一本《三角级数论》，赢得了日本数学界的崇敬和赞赏。1983 年日本岩波书店出版《日本的数学一百年史》时，仍对当年陈建功对日本数学发展的贡献念念不忘，写进了陈建功当时编写《三角级数论》的全部工作。经过 6 年的顽强拼搏，谢绝了导师的挽留和日方的高薪聘请，毅然返回了祖国。

1929 年陈建功应聘浙江大学，邵裴子校长委任他为数学系系主任。他着手改革浙大工科数学的课程设置，按世界发达国家的模式开课。1931 年陈建功向校长推荐了刚通过博士论文答辩的苏步青，聘请苏步青为浙大教授，并提议由擅长科研组织管理的苏先生来接替系主任。从此，陈、苏齐心合力，开始创立浙大学派。他们担任了分析和几何的大部分教学任务，同时延聘王福春、曾炯之到浙大任教，力求拓宽知识领域。陈建功在教学上严肃认真，一丝不苟，讲课从不带讲稿进课堂。他给二、三、四年级共开设高等微积分、级数概论、实变函数、复变函数和微分方程五门课程，常常三门齐头并进。他还自编讲义，1935 年为二年级编写的《级数概论》，二十年后仍被浙大数学系作为青年教师的进修教材。

1937 年抗战爆发，浙大经浙江、江西，到广西宜山，最后迁至贵州遵义、湄潭定居七年。颠沛流离，千里跋涉，他始终坚守教学岗位。1941 年陈、苏合力创办了浙大数学研究所，分别继续进行函数论和微分几何研究，抗战八年，陈建功完成了单叶函数和三角级数的十多篇论文；苏步青从 1928 年到 1940 年间经历着数学研究的"黄金时代"，[2]仿射微分几何的经典性工作，使他站到了当时世界微分几何研究的前列，为培养学生的科研能力，除招收研究生，还创设了"数学讨论班"，分"数学研究甲"（面向全系教师和高年级学生，每人选读一篇论文进行报告）和"数学研究乙"（分析和几何两个专业分头进行，读一本专业书逐章报告）。要求学生读完指定的论文或书后登台报告，当堂接受师生提问质疑，尔后进行答辩，被学生喻为"赶鸭子上架"。这种教学方法，从专业和外文两方面强化学生的自学和研究能力，不仅收到十分可喜的积极效果，且受到师生的普遍欢迎。这种教学手段一直延用到六十年代，且用以

研究生的培养。浙大时期的学生和研究生中培养成为数学家的不下廿余人。如程民德、卢庆骏、张素诚、越民义、秦元勋、叶彦谦、白正国、吴祖基、方德植、曹锡华、徐瑞云、谷超豪、胡和生、熊全治、郭竹瑞、董光昌、孙以丰、张学铭、郭本铁、杨宗道、王斯雷等教授。

1945 年抗战胜利，陈建功曾去台湾接管台湾大学并代理校长一年。1947 年去美国普林斯顿数学研究所任研究员一年。

1952 年院系调整，陈建功、苏步青、谷超豪等浙大理学院部分教师和夏道行、龚升等研究生，一起调到复旦大学。担任复旦大学函数教研室主任的陈建功，除担任部分基础课外，主要精力用于研究生的指导。先后于 54、55 两年招收单叶函数论硕士生 9 人，56 年招收复函逼近论博士生 10 名和复函硕士生 2 名。运用"数学讨论班"这一有效方法，转绕单叶函数论和复变函数逼近论进行课题研究，取得了许多优秀成果。陈建功先后于 55、56 年写出"单叶函数论在中国"、"复旦大学函数论教研组一年来关于函数论方面的研究"两篇综合性论文，对复旦师生的研究成果加以总结。其中陈建功本人的六篇论文，特别是"解析函数用法巴级数的蔡查罗平均逼近"一文，影响较大。56 年陈建功向苏联和罗马尼亚数学家大会作介绍时，受到与会同行的一致好评。复旦期间，夏道行、龚升、石钟慈、吴卓人、郭毓驹、许永华、严绍宗、陈翰麟、陈天平等大批青年数学工作者成长为优秀的数学家。

1958 年浙江师院改名为杭州大学，任命陈建功为副校长。年愈六旬，繁忙的行政事务，没有影响他的事业心和责任感。他同时兼任复旦函数论教研室主任，在两校招收研究生。杭大数学系从 61 到 65 年共招收四届 14 名硕士生。在徐瑞云、白正国协助下，他把"数学讨论班"办得灵活多样：读书报告、科学讨论、学术交流、论文答辩。但"赶鸭子上架"、严格要求、注重外文的宗旨和风格始终坚持不变。

在为三个年级研究生讲课的同时，仍以不懈努力去开拓新的研究领域。在主笔《十年来的中国科学》(数学) 的"函数论"篇，对我国一百多位学者的工作进行系统总结之后，转入了函数论与偏微分方程相关的拟似共形映照的研究。分别于 59、60 两年发表了关于平面区域上拟似共形映照的赫尔窦连续性和线性椭圆型偏微分方程组解的赫尔窦连续性论文；他还继续实变函数逼近论的研究，用富氏级数的蔡查罗平均一致逼近的连续函数得出了优美的估计。在此基础上，他于 1965 发表了"两三年来三角级数论在国内的情况"[3]的综合性论文，介绍了王斯雷、谢廷藩、郭竹瑞、施咸亮、王兴华、孙永生等人的工作，指出了实函逼近论的研究方向。

自 1957 年出版《直交函数级数的和》(中、英文本) 之后，受中科院和出版社约请，于 1958 年和 1964 年相继出版了《实函数论》和《三角级数论》(上)，将自己毕生研究成果进行总结，为国家留下了宝贵的学术遗产。只因十年动乱，《三角级数论》(下) 迟至他逝世后的 1979 年始得与读者见面。

陈建功的远见卓识和精心指导，使杭大一大批青年教师和研究生得以迅速成长，一支长于函数逼近论、调和分析和单复变函数的研究队伍得以形成。杭大数学系也成了全国三角级数论的出色的研究基地。

1971 年，我国现代数学的奠基人之一、国际知名的函数论专家，中科院学部委员、美国普林斯顿研究员、中国数学会副理事长、浙江科协主席陈建功教授，由于得不到有效的治疗，病逝于浙江中医院，终年 78 岁。

1981 年，杭州大学隆重举行纪念陈建功逝世十周年纪念会，科学出版社同年出版了《陈建功文集》，以慰他的九泉之灵。

二 学术成就

陈建功的数学研究涉及正交函数、三角级数、单叶函数、函数逼近、拟似共形映照和偏微分方程等诸多分支。其成果择要介绍如下：

（一）三角级数论

1. 来源于热传导问题研究的富里埃（Fourier）分析是十九世纪初开始的。函数展开为富氏级数的理论是人们关注的中心。由于 19 世纪末魏斯特拉斯（Weierstrass）用三角级数构造了一个处处连续但处处不可微的函数，从而使富氏级数的收敛性研究成了三角级数论的热点问题，而热点的核心当时就是鲁金（Лузин）猜测。

1913 年鲁金提出了如下猜测：若 $f(x)\in L^2(0,2\pi)$，则 f 的富氏级数概收敛。经过诸多数学家的研究，鲁金猜测可归结为如下两方面的问题：

(1) 能否构造一个连续函数，它的富氏级数在一个正测度集上发散；

(2) 是否所有的连续函数的富氏级数都几乎处处收敛。

1922 年，拉德马赫（H. Rademacher）对一般正交系 $\{\varphi_n(x)\}$ 证明了

(A)若 $\sum C_n^2(\ln n)^2<\infty$，则 $\sum C_n\varphi_n(x)$ 概收敛。

1925 年普列斯纳尔(A. Плесснер)证明了

(A′)若 $\sum(a_n^2+b_n^2)\ln n<\infty$，则 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 概收敛。

1928 年，陈建功证明了[4]结论(A)与以下两个结论是等价的：

(B)若 $\sum C_n^2(\ln\ln n)^2<\infty$，则 $\sum C_n\varphi_n(x)$ 的算术平均概收敛；(1925 年由缅绍夫给出)。

(C)若 $\sum C_n^2(\ln\ln n)^2<\infty$，则 $\sum C_n\varphi_n(x)$ 的部分和 $S_n(x)$ 之子列 $S_{2^n}(x)$ 概收敛。(1927 年由 S. Borger 与 S. Kaczmarz 独立给出)。

陈建功建立的这种等价性，旨在说明正交函数级数的概收敛问题可以转化为级数求和以及部分和子列的概收敛问题，从而触及了鲁金猜测的核心。

2. 1929 年陈建功发表论文[5]，指出了 1927 年齐格蒙特关于黎斯（Riesz）典型平均问题两个结论中第二个结论：若正值函数 W（x）满足

$\omega(x)=o[(\ln\ln x)^2]$，则必有就范正交系 $\{\varphi_n(x)\}$ 与数列 $\{a_n\}$ 使得 $\sum a_n\varphi_n(x)$ 在 (a,b) 上处处不能用 (λ,α) 求和 $(\alpha>0)$，而 $\sum a_n^2\omega(\lambda_n)<\infty$。

（这里 $\{a_n\}$ 为实数列，$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$）。一般不成立，且改正了上述结果。

同年陈建功为研究正交函数级数的收敛问题，进一步估计了正交函数级数的勒贝格函数

$$\rho_n(x)=\int\left|\sum\varphi_k(x)\varphi_k(y)\right|dy \quad \text{的阶}$$

指出了希尔勃(E. Hilb)和沙思(O. Szasz)在百科全书中关于 1922 年拉德马赫证明

$$\rho_n(x)=O(\sqrt{n}(\ln n)^{(3/2)+\varepsilon})$$

对于 x 几乎处处成立这一结果不能再改进的结论是错误的，他给出了新的估计[6]

当 $n\to\infty$ 时，几乎处处有

$$\rho_n(x) = O(\sqrt{n}(\ln n)^{(1/2)+\epsilon})$$

这为富氏级数的概收敛和收敛提供了一个基本估计。

3. 三角级数绝对收敛与绝对求和。

1928 年陈建功证明了[7]：三角级数绝对收敛的充要条件是该三角级数为 Young(杨)的连续函数的富氏级数。

所谓 f(x) 为 Young 的连续函数是指它可以表示为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\xi)f_2(\xi+x)d\xi$$

其中 f_1 与 f_2 都属于 $L^2(0,2\pi)$，且以 2π 为周期。

这是哈代(Hardy)、李特伍德(Littlewood)同期完成的，(以称陈一哈代一李特伍德定理更为准确公平。)

1944 年，陈建功又证明了[8]

设 $f\in L(0,2\pi)$ 且以 2π 为周期，又设

$\psi_x(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)-f(x-t)\}$，$p>1$，$0<k<1$． 若对 x 有实数 q，使 $q+pk>1$ 且当 $h\to+0$ 时

$$\int_0^{\pi}|\psi_x(t+h)-\psi_x(t-h)|^p \quad t^{-q}dt = O(h^{pk}),$$

则当 $\alpha>\max(\frac{1}{2}-k,\frac{1}{p}-k)$ 时，f 的富氏级数在点 x 处可以绝对 (C,α) 求和，同时可以 (C,β) 求和，其中 $\beta>-k$。

显然，当 $q=0$，$p<2$ 时的结果便扩充了 1928 年哈代一李特伍德定理。

而当 $p>2$，$q=0$，$\frac{1}{p}<k\leqslant\frac{1}{2}$ 的结果，即为 1937 年发表在英国数学杂志上的周鸣经定理。

1959 年陈建功又证明了[9]：当级数

$\sum(a_n^2+b_n^2)\ln n\lambda(n)$ 收敛时，相应的三角级数 $\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 无条件处处收敛。这里

$\lambda(t)=L_1(t)L_2(t)\cdots L_{j-1}(t)L_j^p(t)\quad(p>1)$，$L_1(t)=|\ln t|$，$L_{m+1}(t)=|\ln L_m(t)|$。

陈建功还推广了乌里杨诺夫(Ульянов)的一个定理[10]，得到了关于无条件收敛的判别理论，这一结果被马尔库什维奇(A. И. Маркушевич)1961 年编入了《复变函数论近代问题研究》一书中，引起了国际上的强烈反响。

1964 年，陈建功得到了富氏级数绝对求和的一些新结果。他证明了[11]。

假如 $[\varphi(t)]_\alpha(\alpha>0,\ 0\leqslant t\leqslant\pi)$ 是有界变差的，则 $\sigma_n^\alpha(f,x)-\sigma_{n-1}^\alpha(f,x)=o(\frac{1}{n})$。

如果 f(x) 的富氏级数在点 x 处 $\alpha(>-\frac{1}{2})$ 阶蔡查罗绝对可求和，且 $\int_{0^+}^{1}t^{-\lambda}\varphi(t)dt$ 存在 $(\lambda<1-\alpha)$，则函数 $t^{\lambda+\alpha}[t^{-\lambda}\varphi(t)]_{1+\alpha}$ 在 $(0,\pi)$ 上是有界变差的。

他还利用这一定理建立了下列函项积分定理：设 A_n 为 $\varphi(t)$ 的富氏系数，若对于某一实数 α，级数 $\sum A_n$ 可 α 阶绝对蔡查罗求和，且 $\int_{0^+}^{1}\varphi(t)t^{-\lambda}dt$ 存在，则等式

$\int_{0^-}^{\pi}\varphi(t)g(t)t^{-\lambda}dt=\sum A_n\int_0^{\pi}g(t)t^{-\lambda}\cos nt\,dt\quad(\lambda<1)$ 关于 $[0,\pi]$ 上的任一解析函数 g(t)

都成立。

陈建功对函数论的研究是举世闻名的，不仅由于他时时处于研究的前沿，抓住中心课题，且所作出的成果极为丰富又极其深刻。

1929 年陈建功用日文撰写《三角级数论》，由日本岩波书店出版。1964 年经过充实、修改和补充，新的《三角级数论》[12]（上）在上海出版（下册 1979 年出版[13]）。而关于直交级数的研究成果，早在 1957 年以《直交函数级数的和》分中、英文版由科学出版社出版。

（二）复变函数论

1．单叶函数论

系数估值是单叶函数论的中心问题。若设 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$ 为单位圆内的单叶解析函数，并记其全体为 S。1916 年比勃巴赫（Bieberbach）提出了如下猜想：

若 $f\in S$，则 $|a_n|\leqslant n$，等号成立仅限于 Koebe（柯贝）函数 $K(z)=z/(1-z)^2$ 及其旋转 $e^{-i\varphi}k(e^{i\varphi}z)$。

几十年来，数学家们用各种方法对一般的 a_n 进行估值，系数问题引人注目。陈建功早在三十年代就对此进行研究。他考虑了 S 的某种子类函数的导数估值问题。

假设 $f\in S$，且成立 $f(e^{i(2\pi/k)}z)=e^{i(2\pi/k)}f(z)$，则称 $f(z)$ 是个 k 次对称函数，且记此种函数的全体为 S_k。

1933 年陈建功得到了[15]：若 $f\in S_k$，则 $n^{(k-2)/k}|a_n|<e^k$ $(n=1, 2, \cdots,\ k=2, 3)$，且指出估计就函数增长的阶来说是精确的。

还证明了：若 $f\in S_k$，$zf'(z)$ 在单位圆内是 P 叶的，则有 $n^{(k-2)/k}|a_n|<Pe^{1/k}$ $(k=1, 2, \cdots, n=1, 2, \cdots)$。

陈建功的上述结果，在国内外引起了大量的研究工作。在长时期内没有人对上述结果作出改进。

为了推进单叶函数论的研究，1950 年陈建功精选了国际上 86 篇论文，以"单位圆中单叶函数之系数"为题，写成综合性论文，全面评述了单叶函数系数问题的进展情况。

1955 年陈建功发表了"单叶函数论在中国"[16]的综合报告，对单叶函数论在中国的进展状况进行分析，着重介绍了陈建功、胡克、夏道行、龚升、谷超豪等人的工作。

1956 年陈建功又写了"关于复旦大学函数论教研组一年来函数论方面的研究"的综合性论文，围绕实函数论、典型的实照函数、单叶函数的掩蔽性质、特殊昆象函数族、具有可测映像的函数、导数讯函的极值函数、马尔可夫链等方面，介绍了复旦函数论教研组的研究工作。

2．复变函数逼近论

在对具有极光滑的境界曲线之区域上的解析函数，用它的法巴级数的蔡查罗平均数均匀地逼近它的问题，陈建功 1956 年得到重要结论：[18]

设 D 是有界域，其境界 Γ 为单纯闭曲线，f 在 D 中正则，在 D+Γ 上连续，$\sigma_n^{(r)}(f, z)$ 为 f 之法巴级数的 r 阶第 n 次蔡查罗平均，则在一定条件下有

$$|f(z)-\sigma_n^{(r)}(f,z)|<C_r\omega(f,\frac{1}{n})\quad(r>0)$$

阿里毕尔（С. И. Альпер）1955 年得到的结论仅是上述结果的 $r=1$ 的特例。

1957 年陈建功用 ρ 级整函数逼近无界区域上的函数取得了一系列结果。[19]当 $\rho=1$ 时，就改进了柯勒（H. Kober）关于带形域的相应定理。

1958 年陈建功又拓广了闵可夫斯基（Minkowski）不等式，然后把上述逼近推广到平均逼近方面。

（三）拟似共形映照理论

函数论的发展与一阶椭圆型偏微分方程组的研究密切相关，它从几何与分析两个角度给出独立定义。自 1957 年美国的贝尔斯（L. Bers）和苏联的波雅尔斯基（Полрский）将两者统一以后，拟似共形映照理论便进入了新的发展阶段。

1959 年陈建功发表了[21]关于平面区域上拟似共形映照的赫尔窦连续性的论文，考虑了一个子族，对 ω（z）给以亚调和的条件，从而加强了法因（Fine）与塞林（Serrin）于 1958 年证明的一个结果。

1960 年，陈建功发表了[22]关于线性椭圆型偏微分方程组的解的赫尔窦连续性的论文，考虑非齐次情况，且在对导数函数放宽要求的情况下取得了很有价值的结论。

（四）实变函数逼近论

自 1955 年起，陈建功便开始了实函逼近论的研究，他将三角级数论中的一些优秀技巧应用于逼近论，再加以发展完善，获得了重要的结果。

1956 年他用富氏级数的蔡查罗平均一致逼近连续的周期函数。他率先引入连续上标和连续下标的概念，且将它们用于函数逼近的刻划，他得出：[23]若函数 $f(x)$ 及其共轭函数 $\overline{f(x)}$ 都是周期 2π 的连续函数，且它们的连续上标小于 2，连续下标大于 0，则 $f(x)$ 的正阶蔡查罗平均与 $f(x)$ 的偏差可用 f 与 $\bar{f}$ 的连续模之和来估计。

这一结果扩充到复函逼近就是结果 2。

1965 年陈建功发表了题为“两三年来三角级数论在国内的情况”一文，总结了国内实函数逼近论的成果，指出了一些发展方向，推进了我国的实函数逼近论研究。

1958 年《实函数论》[24]的出版，是第一部较完整的教材。

三　思想与性格

（一）一位忠诚的爱国者

陈建功从小爱读历史，深受报国为民思想的影响。当他留学日本誉满东瀛之时，谢绝师友的诚挚挽留和高薪聘请，毅然返回祖国。后来，当日本侵华意图日益暴露，他曾为自己取别名陈念台，以绍兴宁死不肯变节的刘念台为榜样，表明宁死不当亡国奴的志向。抗战八年，他只身西行，跟随浙大，千里跋涉，忠于职守。抗战胜利，他欣然去台湾，从日本人手里接管了台湾大学的全部校产并代理校长一年。五十年代，他有一次甚至固执地回绝了科学院郭沫若院长让他会见日本数学家的安排。

陈建功精通日、英、德、俄四种外文，但在浙大编第一本讲义开始，坚持用中文写稿，坚持用中国语讲课，这对以往中国大学用外文教材、用外语讲课的作法是一大改变，影响了当时的许多学校。

抗美援朝初期，求读浙大电机系的长子陈翰祺要求参军参干，怕奶奶不同意，陈建功耐

心说服了自己的母亲，送长子上了前线。

（二）一名正直的科学家

陈建功是辛勤耕耘的园丁，一生著书立说，潜心学问。他治学严谨，态度认真，待生如子，爱才若渴。浙大学生越民义，数学才华出众，只因体育不合格迟一年毕业，他留他当助教，还把他推荐到中科院，帮助他拓广科研领域，终于发挥了他的数学优势，在运筹学方面作出了优异的成绩，成了应用数学所的研究员、副所长。如今七十多岁的越民义教授，谈到老师对自己的栽培，还是激动异常。复旦学生郭毓骑，成绩优秀，业务冒尖，1956 年去北大进修被批判为"白专典型"，诬他为"害群之马"。陈建功却说："这是一匹难得的好马，我就要用这匹马!"，留他当自己的助教，终使他发挥专长，成了复旦的教授。他一生培养的博士、硕士共四十余名，成为教授、研究员的不下卅人。

他一生正气，刚直不阿，胸怀坦荡，直言不讳。1958 年"大跃进"，他在党委书记面前公开说："我对三面红旗是有抵触的"，"教育革命"批判理论脱离实际，他却坚持认为：理论也要学的；当学生贴大字报批判时，他要求以理服人，当面辩论清楚。

他作为一名数学家，一生从事函数论研究，随着世界函数论的发展潮流，他紧紧抓住主流，三次开拓新方向，带动三支队伍，建设三大基地，成了我国函数论学科名符其实的学术带头人，为我国现代数学的发展作出了卓越的贡献。但他永不满足，以"钝叟"自喻，"大器晚成"自勉，活到老，学到老，精益求精，学无止境。

（三）一个有个性的知识分子

陈建功生于清末，36 岁从日本归国，56 岁时共和国建立，22 年后去世。他的不凡经历造成了他特有的个性。他待母至孝，抗战期间，家庭人口多，负担重，信息不通，当得知母亲生活艰难时，便戒烟不抽，将余钱全部汇寄家中。他对子女严而和，提倡自力更生、自我奋斗。老二陈翰麟考上复旦研究生，作为导师的父亲，并不因父子之情而放松要求，而是经常提醒督促，叫他自选课题，自己动手做文章。老三陈翰馥考取苏联留学生，他教育他要刻苦努力，奋发进取。生活上只给一般标准，甚至他们结婚成家，也仅一人给 200 元，其余自己操持。两个孩子不忘父亲教诲，努力拼搏，取得了优异成绩，都成了中科院数学所和系统所的研究员、博士导师，老三还担任了系统所副所长。

陈建功性格开朗健谈，有时比较急躁。平时喜欢跟学生一起喝酒、聊天；读古诗，练毛笔字，看鲁迅小说，听古典音乐。对家乡戏绍兴大班很有好感，对电影却从来不看，认为电影是人家编出来的，还不如自己想想好。他心直口快又不擅辞令，加之有时讲话"尖刻"而容易得罪人。这与一些人处世圆滑、口是心非的作风完全不同，给人留下深刻印象。

陈建功出国留学，归国任教，培育英才，著书立说，整整五十八个春秋。他是老一辈知识分子的典型代表之一，他的一生构成了中国现代数学发展历史不可缺少的组成部分。

陈建功教授是我国现代数学的奠基人之一，是我国知识分子的楷模。历史将永远铭记着他在科学和教育方面对国家和民族作出的卓越贡献。

参考文献

[1] 苏步青：序言，《陈建功文集》，科学出版社，1981。

[2] 陈克艰：苏步青教授谈中国现代数学，《中国科技史料》，1（1990）4。
[3] 陈建功：《数学进展》，4（1965）8。
[4] Chen. K. K., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 4（1928）36.
[5] Chen. K. K., Tohoku Math. Journ., 30（1929）472.
[6] Chen. K. K., Tohoku Math. Journ., 30（1929）1.
[7] Chen. K. K., Proc. Imp. Acad. Tokyo. 4（1928）517.
[8] Chen. K. K., Amer. Journ. Math., 66（1944）299.
[9] 陈建功，Sci. Record. New. Ser., 3（1959）55.
[10] 陈建功：见 Маркушевич 编《复变函数论近代问题的研究》（1961）。
[11] 陈建功：《杭州大学学报》（自然科学版） 4（1964）1。
[12] 陈建功：《三角级数论》（上），上海科技出版社，1964。
[13] 陈建功：《三角级数论》（下），上海科技出版社，1979。
[14] Chen. K. K., Summation of the Fourier Series of Orthogonal Functions，科学出版社，1957.
[15] Chen. K. K., Proc. Imp. Acad. Jap., 9（1933）465.
[16] 陈建功：《科学通报》，11（1955）87。
[17] 陈建功：《复旦大学学报》（自然科学版），1（1956）51。
[18] 陈建功：《复旦学报》（自然科学版），2（1956）89。
[19] 陈建功：《复旦学报》（自然科学版），1（1957）25。
[20] 中科院编译出版委员会主编，《十年来的中国科学》——数学（1949—1959），科学出版社，（1959）132。
[21] 陈建功：《科学纪录新辑》，3（1959）318。
[22] 陈建功：《杭州大学学报》（自然科学版），1（1960）。
[23] 陈建功：《复旦学报》（自然科学版），2（1956）39。
[24] 陈建功：《实函数论》，科学出版社，1958。
[25] 卢庆骏等：数学家陈建功教授，《数学进展》，1963。
[26] 程民德等：一代学者陈建功的学术境界，《自然科学年鉴》，1982。

中国抽象代数的先驱者——曾炯

——纪念曾炯逝世五十周年

曾令林* 曾 铎

（西安高级中学）

一



赣江，象一条长带蜿蜒流入鄱阳湖。在它的中下游省会南昌和新建县相邻。千百年来赣江以它慷慨的赐予哺育了一代又一代"日出而作，日入而息"的子民。

1897年，在新建县生米街斗门村的一个曾姓渔民家庭里，他们的长子呱呱坠地。劳苦人家喜得贵子，马上起名"祥江"，恭恭敬敬记在家谱里。斗门村座落在赣江江畔，曾家后边不远便是滔滔的江水——那儿寄托着贫苦渔民世世代代的希望。襁褓中的祥江便在赣水的和鸣声和江风的薰陶之中长大。也许，这个普通渔民的儿子的命运将和他的祖辈、父辈们一样，把终生的岁月同"江"联系在一起？前面的道路似乎别无选择，只求有口饭吃，只求平安吉祥。

他几乎没有读过书。小小年纪，衣衫褴褛，打着赤脚，轻巧敏捷地跳上木船，跟随父亲去捕鱼，领略了赣江阴晴风雨的变化，经受过狂风恶浪的考验。每当日之夕矣，他和父亲拖着疲惫不堪的身体登岸时，等候他们的是母亲和年令更小的弟妹。他感到欣慰，作为长子，他已象成年男子汉一样干活，养家糊口；他知道自己的责任，家里不能没有他。

但家里太穷了，经常吃不饱饭，大人小孩衣不蔽体。有时鱼卖不出去了，他便陪着母亲沿街叫卖，饱尝人情冷暖，世态炎凉。这个小孩子似乎具有心算的秉赋，不同种类的鱼虾价格不等，几斤几两该多少钱，一瞬眼功夫他便算出来了，分厘不爽，买鱼的人们都啧啧称奇。

"世界潮流，浩浩荡荡"，1911年，民主共和的波澜冲垮了封建朝廷严酷而腐朽的堤防。这些事件发生在远离斗门村的地方，当时人们已经感受到它的影响。风向变了，对于青少年，似乎出现了以前未知的机会。谁能想象，这个奔波于江滔鱼肆之间的小渔夫曾祥江——后起名炯，字炯之——二十年后从德国哥廷根大学留学归来？曾几何时，这个远离京畿的大清帝国平民，变成了在国际上颇受敬重的中国杰出学者！

这个穷孩子是怎样走上求学的道路的呢？

---

* 曾令林是曾炯的侄子和继子（即本文曾炯家信影印件中的"细宝"）。曾铎是堂侄。——编者注。

当曾炯还很小的时候，新建县出了一位大学者雷恒（1866—1916）①。雷恒娶妻于民间斗门村曾家姑娘，是曾炯的堂姑夫。光绪末年，雷恒在科举考试里先中“进士”，后又升迁“翰林”。这在当时是非同凡响的喜事，所有的亲戚都感到无尚光荣。雷恒按传统礼规吹吹打打给岳丈家祠堂送“翰林”的匾额，给岳丈所住的斗门村前竖“翰林”的旗杆。在一片喧闹喜庆的气氛之中，他忽然发现了曾炯。

雷恒以前关于曾炯聪明能干、帮助父母捕鱼为生的事已有耳闻。他看到站在面前的这个堂侄虽然蓬头垢面，却长得目明耳聪，堂堂正正，具有培养造就的素质，于是就向曾炯的父母建议，让孩子去读书。他说：“不要让孩子再去打渔了，好好读书，将来会大有前途。”母亲听了“翰林”的话，惊喜万分，她愿意吃更多的苦，也要让儿子有一个出头之日。此后，在曾炯漫长而艰苦的求学道路上，母亲始终是他最有力的庇护者和支持者。曾炯最敬爱自己的母亲，“谁言寸草心，报得三春晖”，终其一生，都认为母亲为他付出太多，他难以报效。

二

起初他在家乡读私塾，后来又到南昌市高桥小学读洋学堂。但时间都不长，由于家境每下愈况，后来竟难以支撑。曾炯不得不辍学，乘船溯游而上，到南边的丰城煤矿去做童工，为了养活自己、帮助家庭，还为了攒足学费去读书！从自由开阔的江面进入深邃黝黑的矿井，他咬紧牙关，拼命干活。他为人憨厚、忠实，头脑又十分敏捷，矿工们都很喜欢他，认为他靠得住，让他为大伙记帐、管钱。曾炯的数学才能在劳苦的矿工中得到了承认。

1915 年当曾炯 18 岁时，他来到南昌，因他小学尚未毕业，便以“同等学历”考入江西省立第一师范学校。又回到了课堂，他欣喜的心情难以用语言形容。他十分珍惜来之不易的读书机会，三年学习，格外用功。曾炯的同班同学周室藩、夏秉礼、俞照鉴、涂式凡等对他毅力过人、持之以恒、刻苦求学的精神赞不绝口。他们回忆说，当年有的同学是有钱人家的子弟，经常进戏院、下饭馆消磨时间；而曾炯从来不和这些人为伍，他总是独自一人找一个僻静的地方去读书。有空闲他从不休息，就连夜间熄灯后，他还悄悄躲在路灯下看书、背诵和思考。

但是，家里实在是太穷了。父亲不能没有这样一个得力的帮手。他多次到南昌，把正在读书的儿子拉回江边，两人一同去打渔。一家老小食不果腹，他不能理解在城里读书会对家中有什么帮助。有好多次，曾炯已经对回校继续学习感到失望了：家中经济几乎山穷水尽，父亲的要求不是没有道理。每次紧要关头，都是母亲出来维护儿子，坚持让儿子继续上学，她说，不管家里怎么穷、怎么苦，读书的事一定不能误！为此，母亲不知多少次与父亲争执，不知流了多少泪！

每次家庭风波平息后，曾炯又按母亲的意愿回到南昌。他的心里时时惦念着家中，一边在一师求学，一边在夜校代课，赚一点钱补贴家用。他用半工半读的方式维持着学业，时间

---

① 雷恒，字常伯，一字见吾，江西新建人。光绪丁酉（1897）科举乡试，癸卯（1903）任教于张文襄创办的三江师范学堂。甲辰（1904）成进士，改庶吉士，由仕学馆咨送日本留学，归迁翰林院侍讲。后还任师范学堂教务长。辛亥革命后隐居乡里，1916 年 3 月卒于南昌，终年 50 岁。——徐义保提供。

显得特别宝贵。他生活十分简朴，由于饮食差，他开始患胃病。假期回到家中，曾炯仍然心在书上，经常在地面上演算题目。有时别人走到他身边看他做什么，站立很久，他也没有察觉。乡里人都觉得奇怪，原来那样一个机灵鬼，怎么变成了书呆子！所以常常取笑他。他却毫不在意，常说："学然后知不足。别人下一分功夫，我就下两分、五分、甚至十分。"曾炯特别喜欢学习自然科学，数学、物理、化学各科成绩优异，名列前茅；同时，他的语文程度也极佳，不仅写得一手好文章，而且写得一手好字。他也重视学习外语。那时南昌基督教会组织的"青年会"常年办有英文补习学校，定期举行演讲比赛，优胜者有奖金。曾炯哪肯放过这样的机会，他在课余长期到英文学校去，在一次英语演讲赛中获得奖金银币拾元。他没有动用一文，全部交给了母亲。

曾炯对母亲特别孝敬，他清楚知道，如果没有母亲含辛茹苦支持他学习，他便再无可能回到课桌旁。所以他二十年后从德国留学归来在浙江大学任教时，就把母亲接在身边，随时侍候；有空闲的时间，便陪母亲到西湖游玩。1937 年 6 月 14 日曾炯之给母亲的信见下页。

1918 年曾炯以优秀的成绩在南昌一师毕业，按照那时教育当局的规定，在小学做了两年教员。对于以后的道路他想了很多，清楚认识到自己的爱好和特长在于数学，但要作出成绩，还必须继续学习。他选定了数学作为终生的方向，于 1920 年①考入国立武昌高等师范数学系。这在曾炯的生活历程中是一重大的转折点。在同学之中，江西籍的王福春、刘方山和他有相似的出身与经历，所以三人十分要好，结成莫逆之交。他风华正茂，头脑聪敏，有着坚实的基础和勃勃雄心。他对人说："当今数学是一切科学领域的基础、阶梯和先导"，对数学事业怀有崇高的抱负。但"玉不琢，不成器"，大器常是大师的杰作。怎样的机遇在等待着这位步入高等学府的青年人呢？

1923 年著名数学家陈建功第二次从日本留学归来，不久在武昌高师数学系任教。陈教授是我国现代数学的开拓者之一，他的数学工作，在当时日本学界业已产生了影响。作为高年级学生，曾炯非常喜欢听陈教授的课，对于新的数学成果心领神会，对陈教授的教导他都铭记在心。曾炯勤奋求学的精神和优异的学习成绩使陈教授十分感动和惊讶。陈建功先生比曾炯大四五岁，但他们有许多共同语言。他看出曾炯素质不凡，很有培养前途，便鼓励他准备条件，争取出国留学，并说："世界科学最发达的国家现在是德国，德国的数学研究水平居于世界领先地位，它的博士学位最难得到。你最好到德国去攻读数学博士。"

陈教授是留学日本的，对世界数学的发展形势了解得很清楚，为了给国家培养世界第一流的数学家，看中了曾炯是能以胜任的人才，才建议他去哥廷根大学深造。在曾炯心目中陈教授的形象本来就很高大，导师的期望自然就成为他努力奋斗的目标，他面前豁然开朗：要以攀登科学的最高峰为己任。这是以前做小渔夫、小矿工时所从未梦想过、也不能理解的事业。他毫无自卑自馁的心理，坚信"勤能补拙"、"一分耕耘一分收获"，决心脚踏实地地向数学高峰前进，除了数理化英文外，又给自己提出攻克德语关的要求，硬拼硬博，期在必得。

1924 年曾炯在武昌高师毕业，照章到中等学校教两年数学，地点在江西省西北山区武宁县的省立第六师范学校。

---

① 据刘方山先生（暨南大学数学系教授）回忆，曾炯考入武昌高师的时间是 1922 年，26 年毕业，28 年赴德，35 年归国。仅录以备考。——徐义保提供。

母親大人膝下 敬稟者 男于到院之次日曾上一稟 諒蒙
慈鑒 現已上課兩日 精神極佳 萬望
大人不必罣念 家中經濟情形乞隨時示知 以便接濟 子布兄有
何計畫 安兒來書想已收到 [illegible]宝現已達受教育年齡 宜就近讀
書 一切其他事件則因政教手段再有如何 男校所在地帶總為安全
命放心為禱 此間久旱 今晨喜雨 稻田可以插秧 下半年可望丰
收 民食丰收 此上天助我也 專此敬叩
福安 男炯之於城固龍頭鎮西北工學院 廿六年六月十四日晨

曾炯家信

1926年全国举办“欧美公费留学考试”。这是曾炯期待已久的，便毅然报考。待考试结果揭晓，他被录取了，以他的天分和学力，又是名列前茅：官费留学，分派到美国。当曾炯去报到办理出国手续时，看到有人提出要求，改换出国地点，得到了许可。他心中非常惊喜，陈建功教授的殷切希望又在耳边响起：到哥廷根去！他鼓起勇气说明了自己的愿望，结果顺利地获准改派德国，实现了几年来的梦想。

远洋轮船离开了上海港，缓缓驶入大洋。曾炯之站在船弦旁，望着天水相连的远方，想起了赣江和他的童年。他决心不负师长亲友的厚望，为国家民族科学发展贡献力量，“我是一定要回来的，”他对同行的友人说，“我永远忘不了赣江的风和波浪，我永远忘不了辛苦的父母亲。”

三

留学德国，一去八年。

开始时他被分配到柏林大学数学系。初到异国他乡，曾炯之以超人的毅力克制自己思乡的苦闷情绪、迅速适应环境并掌握了德语。那儿的教授和学生们都以不解的眼光看着这位中国青年，他除了学习、研究和交流之外，几乎没有一点休息或娱乐的时间；所开课程，门门都取得了最优秀的成绩。他们不明白他在这短短的时间内怎样能弥补起文化、语言和科学知识上的差距。

曾炯之在德国的经济生活并不宽裕，在最困难的时候，从家乡伸来援助之手：雷家表兄雷子布① 深知炯之的学识才华，不断给予精神鼓励，并汇款支持，对炯之学业有成实在如雪中送炭。

几年学习结束后，曾炯之提出的申请很简单：希望介绍他到哥廷根大学继续攻读博士。校方欣然同意了他的要求。

哥廷根！希尔伯特所在的地方！曾炯之终于来到了这里。

希尔伯特（D. Hilbert 1862—1943）是本世纪最伟大的数学家之一，他在代数不变量问题、类域论、几何基础、变分法、积分方程、无穷维空间、理论物理、数理逻辑等重要领域里都获得了世所瞩目的成就，早在1900年他在巴黎召开的第二次国际数学家大会上提出的23个尚待解决的数学问题更是举世闻名。他于1895年到哥廷根大学执教，在30多年时间里培养和吸引了一大批卓越的数学家，使该校成为当时世界数学的中心。

在希尔伯特周围有一位当时已闻名世界的女数学家诺特（A. E. Noether 1882—1935）、她是1915年应希尔伯特之邀到哥廷根大学的，在近世代数中引入了“理想”等基本概念，将不变量理论纳入代数范畴、深入研究非交换代数，用全新观点和纯概念方法建立起抽象代数的理论，被誉为“抽象代数之母”。20年代是她研究和创造的全盛时期，30年代初她和她的学派已成为哥廷根数学活动最有力的中心，她的思想震动了欧洲数学界，1928年应邀到莫斯科、1930年到法兰克福讲学；许多数学名家也到哥廷根求教，如范德瓦尔登（B. L. Van der Waerden

① 雷宜，字子布，江西新建人，日本东京第一高等学校工科及东京帝大采矿冶金科毕业，曾任江西省立工业专科学校校长。——徐义保提供。

1903—　)。

正是在这个时期，曾炯之来到哥廷根大学；诺特很高兴地但任了这个中国研究生的导师。我们现在对曾炯之怎样在诺特的指导下从事研究的情况所知很少了；从零星的资料中，可以知道 1932 年 9 月 4 日—12 日在苏黎士召开的第九次国际数学家大会曾炯之曾报名，但因迟到未获准参加①。他的工作追随着诺特所开辟的方向，30 年代初已处于世界数学发展的主流地位，站在抽象代数研究的前沿。他经常笑着打趣说："我现在学的数学，越学越没有数字了。"

1933 年曾炯之在德国发表了他的博士论文《代数函数域的可除性》，刊登在哥廷根大学学报（第一期 335—339 页）上。这篇论文在数学界引起了震动；文中提出的两个定理，被命名为曾定理②，这在曾炯之的学术生涯中树立起不朽的纪念碑：

第一个定理："设 Ω 为代数封闭域，则 Ω (x) 上所有以 Ω (x) 为中核的可除代数只有 Ω (x) 自己"。

第二个定理："设 F 为代数封闭域，且 k 为 F (x) 的一个代数扩张，则 k 为拟代数封闭域"。

1934 年，曾炯之在哥廷根大学学报上（198 号 1—19 页）又发表了一篇著名论文《代数函数域上的代数》③：

第三个定理：对于以有限域为系数域的单变量代数函数域上的正规单代数，有和 Hasse—Brauver—Noether 定理、Hasse 定理相当的定理成立。另外，以代数闭域为系数域的单变量代数函数域 k 上的正规单代数，总是 k 上的全阵代数（曾定理）。

第四个定理："设 Ω 为实封闭域，则 Ω (x) 上所有以 Ω (x) 为中心的可除代数除去 Ω (x) 自己外，最多还有一个，其指数必为 2。"

由于他的这些杰出的成果，哥廷根大学在 1934 年隆重授予曾炯之博士学位，并发给他一笔数目可观的奖金——一万多英镑，以奖励他对代数学发展的重要贡献。同时，校方还邀请他留校长期任教，提供优厚的物质待遇和舒适的生活条件。曾炯之在学术上达到了前所未有的高度；在他面前也敞开了走向西方生活的大门。

他已经 37 岁，尚未成家。多年艰苦的研究生涯，使他自顾无暇。但他才华四溢，为人忠厚朴实，这样一颗数学新星，吸引了许多异国青年的注意。一位漂亮的德国小姐执着地追求他。曾炯之本无家室之累，如果答应了，就可以终生在德国定居。

但是，他从来没有想过要走这样的一条道路。

苦难的中国永远在他心中。不论他走到哪里，不论他的地位发生了怎样的变化，他都不会忘记童年、少年时代那些"相嘘以湿、相濡以沫"的劳苦伙伴。他怀着感激之情婉言谢绝了这位姑娘。

---

① 李迪提供。

② 曾定理：设 F 是域，及 $i\geqslant 0$，$d\geqslant 1$ 是整数。设 f 为系数在 F 中的 n 个变数的 d 次齐次多项式。如果对任意的 f，$n>d^i$，方程 $f=0$ 在 F 中必有解 $(x_1, \cdots, x_n)\neq(0, \cdots, 0)$，则 F 称为 C_i (d) 域。如果对任意的 $d\geqslant 1$，F 是 C_i (d) 域，则 F 称为 C_i 域。F 是 C_0 域的充要条件是：F 为代数闭域。C_1 域又称为拟代数闭域（quesi—algebraically closed field）。在 C_1 域 F 上不存在有限次非交换可除代数。有限域是 C_1 域（C. Chevalley）。如果 F_0 是代数闭域，则 $F=F_0$ (X)（单变数有理函数域）是 C_1 域。——李迪提供。

③ 在国内没有查到哥廷根大学 1933—1934 年出版的学报。作者和编者希望学界同仁有机会能收集到曾炯之遗文。

曾炯之很清楚，在这个时候尤其不能留在德国。当时希特勒法西斯已上台持政，1933年推行排斥犹太人的反动政策，连最优秀的科学家也不能幸免。这年秋天，诺特与哥廷根大学其他犹太教师均被解雇。诺特是终生未成家的，被迫只身一人远涉重洋到美国去。曾炯之对法西斯的倒行逆施痛恨异常，十分同情自己的恩师所受迫害，在完成学业之后，决不愿意接受校方邀请留校工作，便于1934年夏末毅然离开德国，返回祖国。

四

“曾炯之回来了！”

江西新建县老家的父老兄弟闻讯奔走相告，张灯结采，备马放炮，热烈欢迎曾博士学成归来！八年过去了，可爱的家乡依然如故，江风徐徐，赣水悠悠。他徒步回到斗门村生他养他的那间江畔老屋，热泪纵横地拜见了衰老的母亲。父亲劳累终生，已经病故。在老人的墓前曾炯之痛苦不已，不断重复说：“我来晚了，我来晚了！”

1935年到37年，曾炯之在杭州国立浙江大学数学系任教，校长竺可桢先生，系主任苏步青先生，还有过去的老师陈建功先生。陈省身、程民德诸先生对他也较了解。他每周讲授四小时高等代数课。虽然他已经是名副其实的博士了，但他并不认为自己登上了什么高峰，依然勤奋研究，一如平常，每天早上五时半必定起床，口袋里总不忘装一本英汉小字典，常常带一本著名德国诗人歌德的原作《少年维特之烦恼》。

1936年丹麦著名量子物理学家N. 波尔（Bohr）到浙大作学术报告，曾炯之作翻译。他的德语非常好，非同一般，受到很高评价①。

1936年曾炯之发表了一篇用德文撰写的论文，刊登在《中国数学学报》第一卷第一期（81—92页），题为“关于拟代数封闭域层次论”，提出了第五个著名定理和一个层次。他引进了CI域的概念。C域F称为CI域，如对任意正整数D，任一系数在F中的N元D次齐次多项式F（x_1，x_2，…，x_N），若N>D_1，必在D_1中有一个非全0解。他并证明了一个重要定理：若Ω为代数封闭域，则Ω（x_1，x_2，…，x_N）为一C域。而C称为“曾层次”。

由于传播渠道的限制，他的这一重要成果一开始并没有为国际数学界所了解，后来一度误传为美国学者的“兰定理”。此一发明权的争议直到70年代才得到解决，现在被称为“曾一兰定理”，见于国内外一些教材和专著。

直到1937年，曾炯之已届“不惑之年”，才同学化学的秦禾穗女士结婚。这年夏天，曾博士应邀到上海讲学，同时接受了北洋大学（改名为北洋工学院）的教授聘约。不久七七事变，抗战爆发；接着北洋大学同其他院校组成国立西北联合大学，迁往西安上课。10月底，曾博士携同新婚妻子从武汉乘飞机赶到西安，任教于西北联大数学系，后来迁至陕西汉中办学。

曾炯之在德国留学时非常喜欢到书店、旧书摊看书买书。当他获得奖金后，便购买了大量古今数学书籍，许多古本，十分珍贵。连同他的论文、手稿，回国时装了满满七大铁皮箱。战事爆发后，他无可奈何地将他全部心爱的书籍文稿转移到新建县乡间的一位亲戚家中。当他乘飞机赶赴西安时，除了一些随身携带的书籍和轻便物品之外，几乎没有带别的东西。令

① 刘方由教授提供。——编者。

人不胜痛惜的是，当故乡沦陷时，七箱书籍文稿全被日寇烧毁。乡民们回忆说，那些书烧了几天几夜才烧尽。这对曾炯之的打击是最沉重的，他对日本法西斯的罪行切齿痛恨。

1939 年，当时国家教育部决定在西康省的西昌县开办一所“国立西康技艺专科学校”，指派李书田先生任该校校长。李非常器重曾炯之的学问，一定要拉他去教高等数学。于是曾炯之便和妻子一道登山渡水，风餐露宿，千辛万苦地来到西昌。由于长期颠簸，劳累过度，引起他的胃病复发。国难当头，战乱连年，生活艰苦，医药匮乏，既得不到起码的营养，又得不到必须的治疗，到西昌不久，他的病便急剧恶化，“天高地迥，号呼靡及”，结果胃穿孔大量出血！曾炯之博士不幸于 1940 年 11 月去世，年仅四十三岁。数学天才，英年早逝，含恨九泉，山河同悲！

中国科学界在失去了章俊之（章用，1910—1939）之后，又失去了曾炯之和王福春（1901—1947），这几位杰出的数学家都是在几乎完全相似的背景下病逝的。几颗明星相继陨落，中国数学界遭到一次又一次沉重的打击。他们生逢乱世，天不假年，他们的才能和潜力还没有来得及充分发挥便与世长辞，这是国家的损失，民族的不幸。

曾炯之博士已经去世五十周年了。秦禾穗女士已不在人间。他们没有子女。雷子布老人等业已作古。兵燹之后，他的全部书籍文稿已荡然无存。迄今，恐怕在江西老家已无人知道他的往事了。

但是，只有他的思想，还在那几篇论文中闪闪发光，作为数学中的瑰宝，将与世长存；特别是他不屈不挠的灵魂、报效祖国的赤子之心，将与青山同在，同赣水长流。

志谢：原文和有关材料经罗见今副教授改写和扩充，谨致谢忱。

附录：

纪念曾炯老师

熊全治
（一九九一年四月于美国伯利恒）

曾炯老师生于江西省新建县生米街，我生于江西省新建县雪舫村。新建县为南昌市分隔为两部分，在南之一部称为上新建，在北之一部分称为下新建。生米街属于上新建，而雪舫村属于下新建。

曾师在武昌高等师范学校毕业后，由江西省政府官费选派赴德国哥廷根大学，随大女数学家 Emmy Noether 教授攻读代数。Noether 教授是抽象代数之一领导人，大众公认其为女性中最伟大之数学家，在男女两性中其亦绝对是一第一流之数学家。数年后曾师在该校获得博士学位，其论文是有名之“曾氏定理”，在代数几何上是一有基本性之贡献。当时如此特出之代数几何家不但在我国只有一两位，即在全世界亦不多。

曾师于一九三五年去浙江大学任教，其去该校之主因是当时该校无人教抽象代数，另一原因是其以前是陈建功老师在武昌高师之学生。那年秋季起我是四年级生，于是即选其所教之抽象代数及群论两门课，内容丰富，大都是根据 B. L. Van der Waerden 及 A. Speiser 所著之两本德文教本。因当时学生均不易看德文书，于是曾师即将我在讲堂上所记下之笔记，予以修改，并加补充，印成讲义，发给全班同学。因此我同曾师交往甚密，获益更多。在浙大数学系四年级学生一般功课均特忙，我当不例外，因之我所担任之编讲义的工作至第二学期亦不得不停止。

抗日战争发生前，曾师即离开浙大去四川，逝世于西昌。曾师去世过早，不仅是我国数学界之一大损失而已。

今应曾师之公子令林先生的函邀，特作此短文及左列七绝以表我之追念及敬意：

雪舫生米同一县
师徒结缘在杭州
五旬年后犹追念
曾氏定理永不衰

王福春教授的生平和贡献*

——纪念王福春诞辰九十周年

徐义保

（内蒙古师范大学科学史研究所）



王福春是我国三、四十年代著名数学家，他在傅里叶级数的收敛、求和以及黎曼ζ函数等方面做出了许多贡献。但由于他英年早逝，现在数学界、数学史界对他的生平与贡献了解得很少，近几年出版的科学家、数学家传记辞典也没有把他收入。今年是他诞辰九十周年，笔者在叶彦谦教授 1948 年发表的“记王福春先生及其数学工作”基础上写成此文，以志对一个战乱中贫病交加、为科学事业奋斗到最后一刻的学者的纪念。

王福春，字梦强，1901 年诞生在江西省安福县十里楼一个“日出而作，日入而息”、生活清苦的王氏家庭。王氏生有两子，王福春排行老大。勤劳、敦厚的王氏深受没有文化、不识字之苦，和老伴商定，为了下一代有出息、不遭恶人欺负，哪怕要饭也要供儿子上学。王福春从小就很懂事，知道父母节衣缩食送他读书极不容易，一上学就勤奋努力，加之他天赋很高，每次考试都名列前茅，常常受到老师的夸奖。

高中毕业，他和许多穷苦人家的孩子一样，为了免交学费、不增加家庭的负担，报考了师范。当时全国分六个师范区，江西与湖南、湖北同属一区。王福春以优异的成绩考入了武昌高等师范学校。当时从日本第二次留学归的陈建功恰在此校任教。在武昌学习时，王福春受到陈建功良好的教诲，奠定了他一生科学研究的基础。

按当时教育部的规定，高等师范毕业生毕业后须到中学任教。王福春当然也不例外，从武昌高师毕业，就去南昌，在江西省立女子中学任教（该校于 1927 年 11 月改为江西省立第一女子中学）。他一边学习、研究，一边从事教学。王福春备课极其认真，教学效果很好，把枯燥的数学讲得生动有趣，深深吸引着每一位同学。在这些学生中有一位聪慧、善良的卢运藩小姐，后来就成为王福春的夫人。他们于 1932 年结为伉俪，婚后生有一子一女。长女王平，儿子王鸣①。

在南昌，王福春因数学造诣精深而闻名遐迩。1929 年，他被江西省教育厅派往日本留学。于是他带着振兴祖国数学的宏伟愿望，负笈东渡，赴日本东北帝大研习。

---

* 本文得到卢运藩女士、王鸣先生、苏步青先生、程民德先生的帮助，在李迪先生、罗见今先生指导下完成，谨志谢忱。

① 王平，已退休，现住杭州市；王鸣，国家地震局地球物理研究所副研究员。

东北帝大数学系是当时日本数学研究中心之一。我国著名数学家陈建功、苏步青当时也在该系学习。该系研究的重点之一是级数论。在藤原松三郎领导下有一批学者如小岛铁藏、冈田良知、泉信一、河田龙夫、高桥龙夫以及陈建功等做出了许多贡献，在世界数学界有一定影响[1]。王福春在这良好的环境中如鱼得水，1933年就在《日本帝国科学院通报》上发表了他的第一篇论文《用黎斯对数平均求傅里叶级数的和》("On the summability of Fourier series by Riesz's logarithmic means", Proc. Imp. Acad. Jap., 9 (1933))。该文推广了 G. H. Hardy 1931 年给出的一个关于 (R, 1) 求和的充要条件，并推导出了七个新定理。

在中国现代数学史上，这篇论文属于发表较早的。在此之前，胡明复、陈建功、俞大维、苏步青、孙光远、王守竟、江泽涵、李仲珩等有论著发表[2]。

在日本数学杂志上，王福春发表了一系列论文，计有十六、七篇之多（其中两篇与高桥龙夫合作)，内容涉及用黎斯对数平均求傅里叶级数的和，蔡察罗 (Cesaro) 和，收敛因子，黎曼 ζ 函数等。一些主要结果如下：

一．用黎斯对数平均求和。设 f (t) 是周期为 2π，Lebesque 可积函数。它的傅里叶级数记为

$$f(t)\sim a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

并令 $$\varphi(u)=1/2\{f(x+u)+f(x-u)-2s\}$$

Hardy 1931 年给出了如下定理：

若 $$\int_0^t|\varphi(u)|du=o(t\log t^{-1})\qquad t\to 0$$

那么 f(t)的傅里叶级数在 x 点可和，和为 s 的充要条件是：

$$\int_t^{\pi}(\varphi(u)/u)du=o(\log t^{-1})\qquad t\to 0$$

记 $$\psi_0=\varphi(t)$$

$$\psi_r(t)=\int_t^{\pi}\psi_{r-1}(u)/u\,du\qquad (r=1,2,\cdots\cdots)$$

王福春把上述定理推广为：

f(t)的傅里叶级数在 x 点可(P, k)求和的充要条件是：

$$\int_0^{\pi}(\sin\omega t/t)\psi_k(t)dt=o(\log\omega)^k\qquad \omega\to\infty$$

他还证明了七个新定理，其中一个定理是：

如果 k 是一正整数，且

$$\varphi_k(t)=\Gamma(k)^{-1}\int_0^t(t-u)^{k-1}\varphi(u)du=o(t^k)$$

则 f(t)的傅里叶级数在 x 点可(R,k)求和。该定理是 A. Zygmund 关于(R,1)求和定理的推广。

对傅里叶级数的共轭级数，王福春证明了如下两个定理：

令 $$g(t)=\pi^{-1}\int_t^{\infty}\{f(x+u)-f(x-u)\}/u\,du$$

A. 若 $\alpha\geqslant 0$, $g(t)\to s(R,\alpha)\qquad t\to 0$

则 f(t)的傅里叶级数的共轭级数在 x 点可(R,α+1)求和。

B. 若 f(t)的傅里叶级数在 x 点可(R,α+1)求和

则 $g(t)\to s\ (R,\alpha+2)$, $t\to 0$

二. 蔡察罗和。对傅时叶级数导级数的蔡察罗和，王福春找到了一个充要条件。

令 $$\psi(t)=(1/2)\{f(x+t)-f(x-t)\}$$
$$g(t)=\psi(t)/t \qquad -\pi\leqslant t\leqslant \pi$$

若 $g(t)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 中可和，则 $f(t)$ 傅里叶级数的导级数在 x 点可 (C,k) $(k\geqslant 1)$ 求和的充要条件是 $g(t)$ 的傅里级数在 0 点可 $(C,k-1)$ 求和。需要指出的是该充要条件已于 1931 年被 A. Zygmund 得到。但王福春的工作是他于 1933 年独立得到的。

对傅里叶级数连续导级数的蔡察罗和，王福春把 A. Zygmund 的定理：若 $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$ 存在且等于 A，则 $f(t)$ 的傅里叶级数的 r 阶导级数在 x 点可 (C,k) $(k>r)$ 和于 $r!\,A$。

推广为：若 $g(t)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 中可知，$g(t)$ 的傅里叶级数在 0 点可 $(C,\delta)(\delta>0)$ 和于 A，则 $f(t)$ 在傅里叶级数 r 阶导级数在 x 点可 $(C,r+\delta)$ 和于 $r!\,A$。

三. 收敛因子。1912 年，Hardy 给出了傅里叶－勒贝格级数在一点的收敛因子(k…

福春在此基础上得到了与下列结果类似的好几个定理。

若 $$f(t)\in L_p \quad (p>1) \qquad \varphi_\alpha(t)=o(t^\alpha) \qquad (\alpha>0)$$
$$\varphi_\alpha(t)=\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\varphi(u)du$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)/n^{\frac{\alpha}{\alpha p+1}}$ 在 x 点收敛。

对 Fourier－Denjoy 级数的收敛因子有以下结果：

令 $f(x)$ 是周期为 2π，Fourier－Denjoy 意义下可积函数

1，若 $\alpha>1$， $\varphi_\alpha(t)=O(t^\alpha)$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)/n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$ 在 x 点收敛。

2，若 $0<\alpha<1$，$\varphi_\alpha(t)=O(t^\alpha)$ $t\in(0,\pi)$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)/n^{\alpha+\delta}$ $\delta>0$ 在 x 点收敛。

四. 黎曼 ζ 函数。1922 年，Littlewood 证得如下公式：

$$\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^2dt=T\zeta(2\sigma)+(2\pi)^{2\sigma-1}\zeta(2-2\sigma)/(2-2\sigma)\cdot T^{2-2\sigma}+O(T^{1-\frac{1}{2}\sigma+\varepsilon})$$

1927 年 A. E. Ingham 把等式右边的 O 项改为 $O(T^{1-\sigma}\log^2 T)$。王福春又把 O 项改进为 $O(T^{\frac{5}{8}(1-\sigma)})$。对黎曼 ζ 函数的零点个数他做了如下估计：

令 $N_0(T)$ 是 $0<t<T$ 中 $\zeta(1/2+it)$ 的零点个数，则

$$N_0(T)\geqslant T/\pi e+o(T)$$

这一估计优于 R. Kuzmin 1934 年所做的。

王福春的这些工作得到了当时日本数学界、以及现在日本数学界的好评。在《日本の数学 100 年史》中只提到三位中国留学生，王福春就是其中之一[3]。

从日本回国初期，王福春的生活很不稳定，先后在国立暨南大学、西北农林专科学校任教授。由于西北农专没有进行数学研究的条件，加之他对西北的气候、饮食极不适应，1938 年又接受了国立浙江大学之聘。但因身体不好暂回江西樟树岳母家休养。不久由于日本侵略

军迫近南昌、鄱阳湖，浙大又不得不从泰和西迁。于是王福春携带妻、子跟随西迁队伍，一路历尽坎坷，到达广西宜山，结束了三年多动荡的生活。这三年多对他来说是一生中的最大损失。这段时间不仅剥夺了他的科研条件、耗去了极富创造力的年华，而且摧垮了他瘦弱的身体，染上了可怕的肺结核。

王福春是一个惜时如金，把事业看成比生命更为重要的人。在宜山一安定下来，他就全力投入了科研。在很短的时间内，就完成了一篇高水平的论文《傅里叶级数的黎斯和》(On Riesz summabitity of Fourier series)，该文完成于1939年元月，1942年发表在《伦敦数学会会志》。

1940年春浙大迁贵州遵义，41年春理学院又迁贵州北部小镇湄潭。王福春由于用功过度，加之湄潭的气候春秋多雨、冬季多雾，对患肺病的人极为不利，可怕的病魔一次次向他袭来。当时物质生活非常艰苦，而且每况愈下，一年不如一年；医疗物品价格昂贵，又极匮乏。据北大经济学家杨希孟教授的调查，1944年昆明区大学教授的平均月薪只有1935年的11%。到1946年初跌到3%，教授的收入已经比不上人力车夫了[4]。与昆明相比，湄潭的物价较低一些，但教授的生活却一样艰辛。浙大校长竺可桢先生在日记中多次记载当时的物价、生活情况，今摘录二则。1944年11月24日："半年以来受湘桂两省战事影响，教职员均入不敷出。余收入薪水、中央津贴及学校六成，共六千七百元，外加委员长研究补助金，合计亦不过七千七百元，……而一月所出买菜每天二百元，……此外则油……如此，合已一万元，……而医药费尚不在内也"[5]。1945年1月25日："湄潭一月未来，大非昔比。……物价大贵。"[6]。王福春作为一普通教授，生活非常清苦。他除了养活一家四口、供孩子上学外，还得付一大笔医药费；吃营养品以补虚弱的身体是不可能的事。尽管如此，他"遇病发时不得不放弃工作，休养身体；可是病情稍有好转，又会立刻读写如初，从不肯作一年半载的休息"[7]。

在湄潭的五年半，王福春的研究硕果累累。从1941年起到他逝世后的二年，每年都有论文发表。仅1942年至45年的四年中，他就发表了19篇论文，占当时全国数学研究者发表论文总数189篇的十分之一[2]。由于他的突出贡献，1946年被中央研究院数学研究所聘为兼任研究员，并先后获民国三十二年度（1943）自然科学三等奖和三十五、六年度（1946、47）一等奖[8]①。他是很少两次获奖的数学家。

他在湄潭的工作主要在以下几方面：

一、黎斯求和。1934年Hardy和Littlewood证明了：

如果

$$\int_0^t |\varphi(u)|du = o(t\log t^{-1}) \qquad t \to 0 \qquad 1.1$$

$$a_n > -Kn^{-\delta} \qquad \delta > 0 \qquad 1.2$$

则f(t)的傅里叶级数在x点收敛。

在此之后提出问题：1.1能否被较弱的条件 $\int_0^t \varphi(u)du = o(t\log t^{-1})$ 1.3

代替。王福春证明了在1.3下，存在一偶函数φ(t)，在0点对任一α>0，

$$a_n = o(n^{\alpha-1})$$

f(t)的傅里叶级数在0点发散，从而否定了上述推测。他还证明若将1.3改为较强的条件

① 在此之前获数学一等奖的有：华罗庚（1941）；苏步青（1942）；陈建功（1943）[8]。

$$\int_0^t \varphi(u)du = o(t^k) \qquad k > 1$$

1.2 改为 $a_n > -kn^{-\frac{1}{k}}$ 或 $a_n > -k \log n/n$

则傅里叶级数在 x 点收敛。

稍后他把上述定理推广为：

若 $$\varphi_\beta(t) = \Gamma(\beta)^{-1} \int_0^t (t-u)^{\beta-1}\varphi(u)du = o(t^\gamma) \quad \gamma \geqslant \beta > 0 \qquad 1.4$$

且 $A_n > -kn^{-\frac{\beta}{\gamma}}$

则傅里叶级数在 x 点收敛。

二年后用 $\varphi_\beta(t)=0(t^\gamma)$ $\gamma>\beta>0$ 和 $\int_0^t|\varphi(u)|du=o(t)$代替 1.4 做了进一步推广。

关于黎斯求和法有以下主要结果：

1. 若 $\int_0^t|\varphi(u)|du=o(t)$且 f(t)的傅里叶级数在 x 点对某一 $k>0$ 可(e^{ω^2},k)求和，则 f(t)的傅里叶级数在 x 点对 $\gamma>0$ 可(e^{ω^2},γ)求和。

2. 若 $\int_0^t|\varphi(u)|du=o(t/\log t^{-1})$ $t\to0$

则 f(t)的傅里叶级数在 x 点可(e^{ω^2},γ) $(\gamma>0)$ 求和。

3. 若 $\int_0^t\varphi(u)du=o(t/\log t^{-1})$ $t\to0$

则 f(t)的傅里叶级数在 x 点可$(e^{(\log\omega)^2},2)$ 求和。

4. 若 $\int_0^t\varphi(u)du=o(t^k)$ $t\to0$

则 f(t)的傅里叶级数在 x 点可(e^{ω^2},γ) 求和、γ 为大于 k 的整数。

5. 若 $\varphi_\beta(t)=o(t^\gamma)$ $t\to0$，$\gamma>\beta>0$

则 f(t)的傅里叶级数在 x 点对所有 $\tau>\gamma$ 可$(R, e^{n^{(1-\frac{\beta}{\gamma})}},\tau)$求和。

二. 强性求和。Hardy 和 Littlewood 于 1935 年证明了：若对 $\gamma>1$，则有

$$\int_0^t|\varphi(u)|^\gamma du = o(t) \qquad t\to0$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty}|S_\gamma(x)-s|^2 = o(n) \qquad 2.1$$

他们指出此结论对 $\gamma=1$ 不成立，并猜测 若$|f|\log^+|f|$可积，且对任一 x 点有

$$\int_0^t|\varphi(u)|\{1+\log^+|\varphi(u)|\}du = o(t) \qquad t\to0 \qquad 2.2$$

则 $$\sum_{\gamma=0}^{\infty}|S_\gamma(x)-s|^2 = o(n) \qquad n\to\infty$$

王福春证明了此猜测成立，并在用 $\int_0^t|\varphi(u)|du=o(t/\mathrm{lon}\ t^{-\alpha})$代替 2.2 的条件下，证明了对 $\alpha>1/2$，2.1 成立。

三. 绝对求和。有以下重要结果：

1. 如果 $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)(\log n)^{1+\varepsilon}$ $\varepsilon>0$ 收敛，

则 f(t)的傅里叶级数对于 $\alpha>1/2$ 几乎处处可$|C,\alpha|$求和。

2. 如果 $1<p\leqslant 2$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)(\log n)^{p-1+\varepsilon}$ $\varepsilon>0$ 收敛，

则 f(t)的傅里叶级数对于 $\alpha>1-p$ 几乎处处可 $|C,\alpha|$ 求和。此处 ε 不能等 0，否则尽管有 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)(\log n)^p$ 收敛，但 f(t)的傅里叶级数在一正测度集上却可能非 $|A|$ 平均求和。

3. 如果 $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)(\log n)^p$ $p>1$ 收敛，

则 f(t)的傅里叶级数对任一 $\alpha>1/2$ 几乎处处可 $|C,\alpha|$ 求和，但 p 不能等于 1，α 不可加强为 $0<\alpha<\frac{1}{2}$。这一定理被称为王福春定理[9]。

四. 黎曼 ζ 函数。对于称曼 ζ 函数，王福春早在三十年代就有论文发表，他是国内最早的研究者，在去世前一刻仍致力此问题的研究。他得到如下结果：

1. 把 Paley—Wiener 的中值定理推广为

$$\int_{1}^{T}\{\log|\zeta(1/2+it)|\}/t^2dt=2\pi\Sigma\beta_\nu/|\rho|^2+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}R\{e^{-i\theta}\log\zeta(1/2+e^{i\theta})\}d\theta+O(\log t/t)$$

其中 $\rho_\nu=\beta_\nu+i\gamma_\nu$ 是当 $T\to\infty$ 时黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 满足 $\beta_\nu\geqslant 0$ 的零点。

2. 证明了中值公式

$$T^{-1}\int_{0}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^2\log|\zeta(\sigma+it)|dt\sim\zeta(2\sigma)\log\zeta(2\sigma)$$

在浙江大学王福春除潜心科研外，还教授数学分析、函数论、近世代数、数论、群论等课程[7]，受业于他的学生有叶彦谦、秦元勋、崔士英、曹锡华等。

1946 年 7 月浙大复原回杭州时，王福春病势正重，只好暂留湄潭。待病情稍好，就由重庆顺江而下，回到江西老家。11 月受聘于国立中正大学，任数学系首任系主任。

在中正大学，他除主持数学系日常事务和给学生授课外，全力倾注于黎曼猜想研究。1859 年黎曼猜测：ζ (s) 的零点都在 Re (s) $=1/2$ 上。王福春深信这一猜想是不成立的，极力想反证明它[10]①。由于过分紧张工作，肺病加剧，不得不住进了医院。在病塌上他仍争分夺秒的计算，纸不够时就把床上的报纸揭下来；医院熄灯，他就打着手电躲在被子里偷偷地进行。但死神无情，1947 年 9 月 26 日，肺结核夺去了这位数学家宝贵的生命。一代学者，带着对未竟事业的遗憾，溘然逝去，终年 46 岁。

在王福春逝世前半年，数学家李仲珩在总结中国现代数学的发展时说："就以往来说，我们在分析和几何方面的成就最大，其次是代数和数论。走分析这条路，是陈建功和熊庆来两位领导起来的。其中成就最大的要算在伏氏（傅立叶）级数的研究者，尤以王福春为难能可贵"[2]。王福春在其短暂的一生中给世人奉献了凝聚着他心血的 44 篇论文。这些论文丰富和发展了傅立叶级数收敛、求和理论。对中国现代数学的发展，王福春作出了不可磨灭的贡献。

王福春是农民的儿子，他继承了父辈勤劳、敦厚、朴实的优良品质。与父辈一样，终其一生，都在辛勤耕耘。所不同的是，他在科学的园地里创造精神财富。他一生挚着追求，数十年如一日，在极端困苦的条件下，披荆斩棘，进行数学研究。国立中正大学文学院教授刘

① 长居巴黎的日本数学家松本(H. Matsumoto)于 1984 年 11 月 9 日宣布解决了黎曼猜想，但在数学界未得到承认[11]。

泳溱称赞他"诚以学术而殉身，足为士林所矜式"。他吃的是草，献出的却不仅是奶、血，而是整个生命。他的精神足可惊天地，泣鬼神。

王福春从事基础理论研究，与从事应用、军事和技术发明相比，自然得不到应有的重视、鼓励和物质支持。但他抱定坚不可摧的信念：报效祖国，为振兴数学竭尽全力。他箪食瓢饮，人皆不堪其忧；病魔缠身，挣扎于死亡线；于战乱连年、人心惶惶之际，倾注于科学创造，直至生命最后一刻。著名科学家竺可桢、苏步青、陈省身诸先生非常了解他，对他十分关心。1947年2月数学家李仲珩曾大声疾呼政府赶快帮助贫病交加的王福春，并说"爱惜他，便是保存国家的元气"。可是天不假年，半年以后我们的数学天才便凋谢了。他的好友，中国抽象代数的先驱曾炯七年前已先他而去，两年后另一位代数数学家李华宗又殒落了。他们都是中国数学界的栋梁之材，一个接一个夭折，中年辞世，损失难以弥补。

王福春去世后归葬原籍。四十多年后，今天，我作为一个后学者，怀着崇敬的心情来到安福县十里楼村，希望能拜谒他的亡灵，却找不到他的墓冢，也找不到他的墓碑。老人们依稀记得，他的墓在修路时已平掉，至今踪迹全无。我走在平坦的公路上，百感交集，思绪万千。他就安息在这下面，愿人们前进的脚步声永远伴他长眠。

历史将不会遗忘他。中国现代数学史将镌刻着王福春这个光辉的名字，他永远活在具有科学精神的人们心中。

参考文献

[1] 日本数学 100 年史编委会：《日本の数学 100 年史》下，岩波书店，1983，10，第 82—83 页。
[2] 李仲珩：三十年来之中国算学，《科学》1947 年第 3 期，第 67—68 页。
[3] 同 [1] 第 20、83 页。
[4] 孙守全：被遗忘了的中国科学家，《科学》1947 年第 6 期，第 164 页。
[5] 竺可桢：《竺可桢日记》Ⅱ，人民出版社，1984，第 797 页。
[6] 同 [5] 第 818 页。
[7] 叶彦谦：记王福春先生及其数学工作，《科学》1948 年第 2 期，第 51—54 页。
[8] 教育部教育年鉴编委会：《第二次中国教育年鉴》商务印书馆，1948 年 12 月，第 869—872 页。
[9] 陈建功：《三角级数论》上册，上海科学技术出版社，1964 年 12 月，第 276—279 页。
[10] 闵嗣鹤：数论在中国的发展情况，《数学进展》1955 年 1 卷第 2 期，第 400 页。
[11] K. Devlin (李国伟译)：1984：数学丰收年，《科学月刊》第十六卷第六期第 454—456 页。

几何基础与 Hilbert 投影度量原理

刘　逸
（徐州师范学院）

为了几何学的公理化，Hilbert 对短程线问题进行了研究，由此建立起完整而和谐的几何学公理体系。不仅如此，Hilbert 还在"关于作为两点间最短连线的直线"文中，给出了投影度量原理；此一原理对现代数学有较大影响，在数学的很多分支中得到了广泛的应用。本文将就此予以论述。

一　引　言

1898 年 Hilbert 在哥廷根大学讲授关于几何基础课程，1899 年正式出版了《几何基础》一书。他发展了一组关于欧几里得几何公理，同时采用极少量的符号，用严谨的现代公理化方式建立起传统的思想阶梯：基本概念—公理—定理。并在该书的引言中指出：几何学的课题是作为对于"我们空间直观的逻辑分析"，其目的是给"几何学建立一个完全而最简单的公理系统"。

Hilbert 关于几何基础公理化的思想，完整、严密而又科学。正如他在 1900 年《数学问题》演讲中所叙述的："在研究一门科学的基础时，我们必须建立一套公理系统，它包含着对这门科学基本概念之间所存在的关系的确切而完备的描述。如此建立起来的公理同时也是这些基本概念的定义；并且，我们正在检验其基础的科学领域里的任何一个命题，除非它能够从这些公理通过有限步逻辑推理而得到，否则，就不能认为是正确的。

在关于公理所能提出的许多问题中，下述问题最为重要：证明这些公理不互相矛盾，就是说，以它们为基础而进行的有限步骤的逻辑推演，决不会导致矛盾的结果"。[1]

公理化方法是 Hilbert 在研究数学工作时的指导原则，他创造性地给出了历史上第一个欧几里得几何公理系统，提出了完备性、相容性与独立性的完整而和谐的公理体系。

二　几何基础的公理化

欧几里得的光辉巨著《原本》，作为公理化表达方式的最初尝试，在他所处的时代，无疑是杰出的、成功的。正因如此，《原本》才经久不衰而流传于世。然而，不可否认，《原本》中存有逻辑结构缺陷与较多的默认的假定，而其公设又不能证明它所假定的事实。例如，在公设Ⅱ中，断言：每条直线都可以无限延长。但是，此处不一定意味着直线是无限的，只能意味着直线是无端的或无界的；又如，在命题 121 的证明中：若一直线从一三角形的一个顶点进入该

三角形，充分延长时，必与对边相交。Moritz Pasch(1843—1930)认为：有必要对此情况加上一个公设。再如，在命题 11 中，假定以一线段的两个端点为圆心，以该线段为公共半径的两个圆相交。无疑，这里已默认了连续性的存在。

上述类似存在的问题正说明了《原本》存在着逻辑的缺陷即公理之不足。事实上，数学上的很多重要概念如顺序、运动、连续等概念，不仅在欧几里得时代尚未出现，即至 18 世纪止，都还未能完全明确地建立起来，无充分的逻辑加工。从欧几里得时代起，至 19 世纪，两千多年来，数学家在数学基础方面做了大量工作。人们希望以清晰、简洁而又含最少量的初始概念来作为数学科学的可靠而充分的基础。

由《原本》的第五公设而导致的非欧几何的诞生，是 19 世纪几何学的质的飞跃。正因如此，也促进了几何基础问题的研究。

19 世纪末 20 世纪初，几何学的基础被深入研究之后，才为欧几里得几何建立了令人满意的公设集合。如：在 1866 年，由 Helmaltz(1821—1894)在其公理体系中提出运动概念作为基本概念；1871 年德国数学家 Cantor(1845—1918)与 1872 年德国数学家 Dedekind(1831—1916)拟成了关于直线的连续公理；1882 年德国数学家 M. Pasch 拟成了顺序公理；1889 年意大利数学家 G·Peano(1858—1932)给出了结合公理和顺序公理；他的学生 M·Pieri(1860—1904)于 1899 年在发表的论文《作为演绎系统的初等几何》中引用个数最少的基本概念："点"和"运动"两个基本概念。

然而，在研究几何基础方面成绩最为突出的应属 D. Hilbert. 他以结合公理、顺序公理、合同公理、连续公理、平行公理五组公理共 21 条，将点、直线、平面、其上、合同和之间作为基本术语于 1898 年写成《几何基础》一书并出版。

关于几何基础公理化的构思与雏形，早在 1894 年 8 月 14 日 Hilbert 给 F. Klein(1849—1925)的信中即已详细地阐述了他的观点；这里我们首次引述他信中的有关内容：

"如果我们把点，直线和平面当作元素，则下述公理即可作为几何的基础

1、关于这些元素相互关联的公理，简要概括起来，内容如下：

任意两点 A 和 B 总决定一条直线 a。——不在一条直线上的三点 A、B、C，决定一个平面 α。——如果直线 a 上的两点 A、B 在平面 α 上，则该直线全在平面 α 上。——如果两个平面 α、β 有一个公共点 A，那末它们还有一个公共点 B。——每条直线上至少有两个点，每个平面上至少有 3 个不在一条直线上的点，而空间至少有 4 个不在同一平面上的点。

2、通过第二条公理可以引出线段的概念和直线上点的顺序的概念。这条公理由 M. Pasch(参阅《新几何讲义》，Teubner 1882)首先提出并进行系统研究的，它的内容基本如下：

一条直线上的两点 A、B 间至少总存在这条直线上的一个第三点 C. ——一条直线上的三点中，总有一个并且仅有一个点，它位于另外两点之间。——如果 A、B 在直线 a 上，那末总存在这条直线 a 上的一个点 C，使得 B 位于 A 和 C 之间。——对一条直线 a 上的任意 4 个点 A_1、A_2、A_3、A_4，总可以按如下方式排序：只要下标 h 比 i 小而下标 k 比 i 大，或者反过来，i 大于 k 而小于 h，则 A_i 一定位于 A_h 与 A_k 之间。——位于平面 α 上的每条线 a，都将平面 α 上的点分成两个区域，且具有如下性质：一个区域中的任一点 A 与另一区域中的任一点 A′ 间决定一条线段 AA′，在此线段上存在直线 a 的一个点；与此相反，同一区域中的任意两点 A 与 B，也决定线段 AB，但它不包含直线 a 的点"。[2]

上述之1和2的内容，正是《几何基础》中结合公理与顺序公理以及它们的推论；且在2中已包含了Pasch公理。显然，在《几何基础》书中写得更为简洁、有序。

关于连续公理，Hilbert作了如下的叙述：

"3、对于连续性公理，我予以如下说法：

设A_1，A_2，A_3，……是直线a上的一个无穷点列，而B是a上的另外一个点，它们这样排列：只要下标h比i小，A_i就位于A_h与B之间。于是存在一点C，它具有如下性质：无穷点列A_2，A_3，A_4，…中的所有点都位于A_1与C之间，而每一个同样满足这条件的其它点C'，位于C和B之间。"[3]

显然，Hilbert的连续公理，与Dedekind公理相同，而点C，实即Dedekind界点。有了上述三公理为基础，再借助合同公理与平行公理，Hilbert顺利的建立起几何学公理化基础。

三　Hilbert投影度量原理

在建立几何基础公理化的过程中值得我们予以高度重视的是，Hilbert还建立了关于度量双曲几何的一个数学模型，在这个模型中存在不共线的三点构成的三角形，其一边之长等于另两边的长度之和。具体构思如下：

"如果我们据此用类似F. Lindeman（参阅《几何讲义》第二卷第一部分第433页及下页）用的方法，即能得到如下结论：

我们将每一个点归于3个有限实数x,y,z，而将平面归于这三个数x,y,z之间的一个线性关系。于是，所有这样的点，它们对应的3个数x,y,z满足该线性关系，则均在相应的平面上；反之，在此平面上的所有的点，它们对应的数x,y,z满足这一线性关系。如果从现在起把x,y,z解释为普通欧氏空间中的直角坐标，那末，原来空间的点就对应着欧氏空间中某个凸的几何体内部的点。反之，该凸几何体内部的点即对应着我们原来空间的点；因此，我们原来的空间即映射成欧氏空间中一个凸几何体的内部"。[4]

就这样，Hilbert构造了一个新的数学模型，进一步阐述了它的性质：

"在这里，凸几何体可理解为具有如下特性的几何体：如果我们将该几何体内部的两点用直线连接起来，则这条直线位于此两点间的部分完全落该几何体的内部。

反之，若在欧氏空间中任意给定了一个凸的几何体，则同样可以定义一个确定的几何，在其中上述公理完全适用：该凸几何体内部的欧氏空间直线和平面，对应着一般几何中的直线与平面；在其边界上或外部的点，以及完全在该几何体外部经过欧氏空间的直线与平面，在一般几何中无元素与之对应。因此，前面关于一般几何中的点映射到欧氏空间中凸几何体内部的结论，反映了一般几何元素的一个特征"。[5]

由上述内容可知，Hilbert的公理化的思想与方法，是数学中的逻辑演绎方法高度发展的结果。因此，才能够清晰地分辨出笼罩着数学基础的神秘的疑云；从而，在数学领域中始能开拓出新的境界。正因如此，Hilbert提出了关于投影度量的新概念——投影度量原理。现引述如下：

"现在在我们的一般几何中定义线段AB长度的概念。为此目的，我们将原来空间中点A与B所对应的欧氏空间中那两个点同样标记为A与B；然后我们在欧氏空间中由点A与点B

向外延长直线 AB，与凸几何体的边界交于 X 和 Y 点；又将欧氏空间中任意两点 P、Q 间的欧氏距离简单的标记为$\overline{PQ}$；于是，称实数值

$$\widehat{AB}=ln\left\{\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}\cdot\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right\}$$

为一般几何中线段 AB 的长度。由于

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}>1,\quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}>1$$

故此长度恒为一个正的量。

容易一一列举长度概念的特征，它们必然导致$\widehat{AB}$给出方式的一种表达：即如果在此几何体内部固定 A、B 两点，而以如下方式改变几何体的边界，即让边界点 X 向 A 移动，Y 趋向 B，则两个比值

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}},\ \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}$$

中的每一个都增大，从而$\widehat{AB}$的值增大。

现假设在凸几何体内部给定一三角形 ABC，它所在的平面 α 将几何体截出一个凸卵形。我们设想把三角形三条边 AB,AC,BC 的每一条都向它们各自两个端点向外延长，分别交卵形边界于点 X 和 Y，U 和 C，T 和 Z；而后我们作直线 UZ 与 TV，且将之延长交于 W；它们与直线XY 的交点分别记为 X′和 Y′。现在我们用三角形 UWT 代替平面 α 上的凸卵形作为基础，容易看出，在这个三角形所决定的几何中，长度$\widehat{AC}$和$\widehat{BC}$与在原来几何中一样，而 AB 边的长度经过这一变动后变大了。为与原来的长度$\widehat{AB}$区别，我们把 AB 边的新长度标记为$\widehat{\widehat{AB}}$，则有$\widehat{\widehat{AB}}>\widehat{AB}$。

现在对三角形 ABC 的边的长度，有简洁的关系

$$\widehat{AB}=\widehat{AC}+\widehat{BC}$$

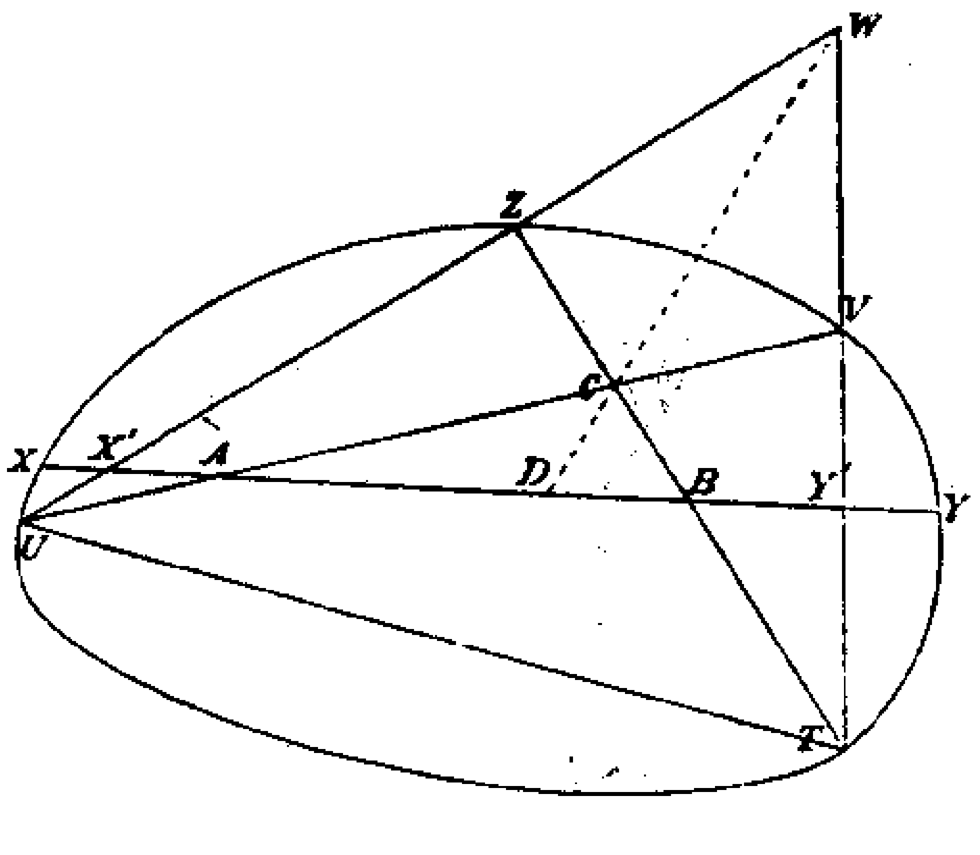


图 1

为证明这点，我们连接 W 与 C，并延长这条直线交 AB 于 D。根据著名的交比定理，由 X′,A,D,Y′和 U,A,C,V 这两组点列的透视位置，

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'D}}\frac{\overline{X'D}}{\overline{X'A}}=\frac{\overline{VA}}{\overline{VC}}\frac{\overline{UC}}{\overline{UA}}$$

由 Y′,B,D,X 和 T,B,C,Z 这两组点列的透视位置，

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'D}}\frac{\overline{Y'D}}{\overline{Y'B}}=\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}$$

将此两等式相乘，得

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'B}}\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'A}}=\frac{\overline{VA}}{\overline{VC}}\frac{\overline{UC}}{\overline{UA}}\cdot\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}$$

这个新等式就证明了我的命题。

由前面的探讨，您可以看到，仅在我这封信开头列举的公理的基础上，下述一般定理成立：

在每个三角形中，两边之和大于或等于第三边。"[6]

至此，Hilbert 开拓性的给出了新定理——投影度量原理。此一原理对数学领域所发挥的作用，在当时即引起了重视，本文将在后面予以论述。Hilbert 给出了投影度量原理后，又进行了详细的讨论：

"显然，当且仅当平面 α 把凸几何体的边界截成两条线段 UZ 和 TV 时，等于的情况成立。这个条件也可以借助凸几何体而表示出来。即如果在原来几何中任意给定平面 α 上的两条交于 C 点的直线 a 和 b，则在 α 上围绕 C 点的 4 个角区域的每一个中，总存在这样的直线，它与 a、b 都不相交；然而，在对顶的两个角区域中，没有这样的直线存在，因此有关条件满足，于是总存在这样的三角形，其两边之和等于第三边。"[7]

此处应明确的是，Hilbert 所定义的凸几何体，是在有限的情况下所展开的一系列的几何论证。为此，他又特别作了如下的说明：

"最后，允许我补充说明，在前面的阐述中，我总是假定凸几何体是有限的。如果在由原来的公理定义的几何中，存在下述特征的一条直线和一个点，即过此点只能作该直线的一条平行线时，则那个假定就无根据了。由此易见，我的思维已经得到了怎样的改变。"[8]

至此，Hilbert 完成了"关于作为两点间最短连线的直线"的研究。这一成果，在当时他即意识到有如下的作用：

"直线是两点间的最短距离这一定理以及实质上等价的与三角形三边有关的欧几里得定理，不仅在数论而且在曲面论和变分学中起着重要的作用。"[9]

事实上，短程线问题无论是在几何基础、曲线曲面论，以及变分学甚至在力学中都起着十分重要的作用。这一特殊问题的研究对不同的数学分支均有其重要的应用。因而，Hilbert 希望："对于该定理成立条件的深入研究将会给距离的概念以及其它的基本概念以新的解释。所以，在我看来，这种可能的几何学的构造与系统研究是十分必要的。"[10]

诚如 Hilbert 所希望的那样，在"投影度量原理"建立后，数学界给予了普遍的关注；此一原理不仅可应用于 Hilbert 空间，也可应用于 Banach 空间，从而使得投影度量原理在现代数学中得到了多方面的应用。

为了说明 Hilbert 投影度量原理的应用，我们介绍它在 Banach 空间的应用情况：首先我们从一般的情形下来定义在 Banach 空间的 Hilbert 度量：

设 X 是一个实 Banach 空间，K 是 X 中的闭体锥，即 K 是一个闭子集，具有性质：(Ⅰ)K 的内部 $\mathring{K}$ 非空，(Ⅱ)$K+K\subset K$，(Ⅲ)对一切 $\lambda\geqslant 0$，$\lambda K\subset K$，(Ⅳ)$K\cap -K=\{0\}$。定义在 X 中的关系 $\leqslant$ 和 $<$，按通常的方式分别意为当且仅当 $(y-x)\in K$ 和 $(y-x)\in \mathring{K}$ 时有 $x\leqslant y$ 和 $x<y$。因

Hilbert 投影度量在代数学和分析中的应用，G. Birkhaff 于 1957 年已予以阐明。[12]Birkhoff 证明了关于非负矩阵的 Perron—Frobenius 定理以及关于带正核的积分算子的 Jentzch 定理都能在适当的度量空间中应用 Banach 空间的压缩映象定理来证明。

除上述应用外，Hilbert 投影度量原理还可应用于正定对称矩阵、常微分方程组等范畴；详情请阅"Hilbert's Metric and Postive Comtraction Mapping in a Banach Space"与"Existence theorem for a nonlinear integral equation"[13]二文，他们系统地研究了投影度量原理在 Banach 空间的一系列的应用，使得该原理在现代数学中起到了应有的作用。随着数学领域的不断充实与发展，该原理将会显示出更为广泛与重要的作用。

参 考 文 献

〔1〕 D. Hilbert,《数学问题》。《数学史译文集》，P. 66。上海科技出版社，1981。

〔2〕～〔8〕： D. Hilbert, Ueber die gerade Linie als Kürzeste Verbindung Zweier Punkte. Mathematische Annalen, 46 Band. 1895.

〔9〕、〔10〕同〔1〕。

〔11〕 参见 P. J. Bushell, Hilbert's metric and Positive Contraction maings in a Banach space, Arch. Rational mech Anal. 52(1973). 330—331.

〔12〕 Birkhoff. G. Extensions of Jentzch's theorem. Trans. Amer. Math. SOC. 219—227(1957).

〔13〕 A. J. B. Potter, Existence theorem for a nonlinear integral equation. J. London Math. Soc. (2) 11 (1975), 7—10.

苏联的数学史研究*

（苏） А. П. Юшкевич А. Н. Боголюбов

1. 1945 年前的数学史研究

只有在伟大的十月社会主义革命之后，我国科学史的研究工作才具有系统性和广泛性。普及中、高等教育和广泛的科学普及工作在社会主义建设的前几年就显示出巨大成就，全面培养国家的知识分子队伍第一次成为必要和可能，所有这些都影响到数学史研究的发展。为了寻求传播知识的最好方式，自然要利用知识发展的历史资料。В. А. 斯捷克洛夫(Стеклов)的著作《数学及其对人类的作用》(1923)是这方面最明显的例证。在老一辈数学家中，继续并更深入地进行科学史研究工作的应首推 А. В. 瓦西里耶夫(Васильев)。在 1919 年，他出版了《整数・历史概述》一书，书中对俄国学者在数论领域的发现予以应有的评价。两年之后，他又发表了第一部论述俄国在 1725－1863 年(科学院奠基时期)数学发展的重要著作。在这部名为《数学》(1921)的著作中，作者特别详细地研究了 Н. И. 罗巴切夫斯基(Лобачевский)、Ф. Г. 明金(Миндинг)，М. В. 奥斯特罗格拉茨基(Остроградский)，В. Я. 布尼亚科夫斯基(Буняковский)和 П. Л. 切比雪夫(Чебышев)的创造。在 В. А. 斯捷克洛夫的著作《切比雪夫所研究的理论与实践》(1921)中，有对 П. А. 切比雪夫的创造具有说服力的评价。

1920 年由 А. В. 瓦西里耶夫发起，在彼得堡大学附属师范学院中成立了数学小组，一年后改组为彼得堡数学会。在其它大学和师范学院也开始进行数学史的研究工作，这种学校的数目很快在全国范围内增长，包括那些在沙皇统治时期蓄意破坏文化发展的少数民族地区。20 年代初，在顿河畔罗斯托夫，Д. Д. 莫尔杜海-博尔多夫斯科伊(Мордухай-болтовской)教授首次组织了大学生数学史讨论班。Д. Д. 莫尔杜海-博尔多夫斯科伊是一位知识广博的学者，他在数学史研究方面作出了卓越的贡献。1928 年他以《现代数学一些基本概念来源的研究》为题目发表了关于代数学和分析学历史的很有见地的论文，其中研究了函数、极限、代数符号等概念的起源。

在莫斯科，由于 Д. Д. 莫尔杜海-博尔多夫斯科伊的学生 М. Я. 维戈茨基(Выгодский)和 С. А. 亚诺夫斯卡娅(Яновская)的积极活动，数学史研究在 20 年代中期开始兴起。他们是具有马克思列宁主义方法论观点的苏联数学史讨论班的第一批教师和倡导者。在研究期间，С. А. 亚诺夫斯卡娅领导了马克思数学手稿的出版工作，其俄译本由她主编出版并附有她的详细评注和 1933 年的论文。在马克思的这些未曾发表过的手稿中，论述了在数学发展过程中逻辑与历史的关系的深刻思想，关于符号的运算作用，并于 18 世纪微分学"神秘主义的"、"合理的"、"代数的"各个时期。13 年后，С. А. 亚诺夫斯卡娅重新研究数学手稿，为手稿的更完整的出版

---

* 原题：Историко-математические исследование. 译自 Очерки развития математики в СССР，Киев Наукова думка 1983，514－535. 全文共五节，这里发表前两节，后三节是俄罗斯、古代、中世纪数学史的研究。杜瑞芝译，罗见今校。

物作了注释，该出版物在她去世后于1968年发表〔K. A. 雷布尼科夫(Рыбников)也做了许多工作〕。M. Я. 维戈茨基对分析基础的历史发生兴趣。

在M. Я. 维戈茨基和C. A. 亚诺夫斯卡娅的贡献之后，A. П. 尤什克维奇(Юшкевич)开始研究数学史，他的首批作品是关于L. 卡诺(Carnot)的数学哲学(1929)和对17世纪末与18世纪的分析学概念的论证(1934)。1930年，A. O. 格尔丰德(Гельфонд)发表了《超越数理现状的历史概述》一文，后来他还不只一次地围绕这个数学史课题工作。

在20年代中期，数学史成为莫斯科大学物理-数学系的教学科目，亚诺夫斯卡娅被委托领导大学生和青年科学工作者关于哲学和科学史的学术讨论班。30年代初，维戈茨基和亚诺夫斯卡娅就在莫斯科大学讲授数学史课，并在1933年组织了数学史学术讨论班，它成为这个领域的主要研究中心之一。青年数学史家C. E. 别洛泽罗夫(Белозеров)和Г. Б. 彼得罗相(Петросян)(维戈茨基的两个学生)，Э. Я. 巴赫穆茨卡娅(Бахмутская)和雷布尼科夫(亚诺夫斯卡娅的两位学生)开始了学术活动。数学史的教学也在高等师范学校实施。在莫斯科州师范学院，И. К. 安德罗诺夫(Андронов)连续几十年从事数学史的教学工作。

在30年代上半期，出版经典数学著作译本的工作开始了。通常情形下，这些著作都要精心地加以评注。开普勒、伽里略、卡瓦列里、笛卡儿、费马、牛顿、洛必达、欧拉、卡诺、蒙日、伽罗瓦、狄利克雷等人的著作被出版。许多数学家和科学史家参加了这项工作，他们是维戈茨基、A. H. 多尔戈夫(Долгов)、H. C. 科什利亚科夫(Кошляков)、C. Я. 卢里耶(Лурье)、莫尔杜海-博尔多夫斯科伊、Б. И. 谢加尔(Сегал)、H. Г. 切博塔廖夫(Чеботарев)、尤什克维奇，以及其他一些学者。在《苏联大百科全书》第一版的相应文章中，数学史占有重要地位。在有关课程中使用的教材，如H. G. 修滕(Zeuthen)的论述古代、中世纪和17世纪数学的名著，F. 克莱因(Kline)的关于19世纪数学的第一卷，H. 维莱特纳(Wieleitner)的选集，O. 诺伊格鲍尔(Neugebauer)的论及古代埃及和巴比伦的教材都被译成俄文。维戈茨基是这些译本最得力的组织者之一。

在列宁格勒开展了数学史研究的重要工作，1934年以前这里是苏联科学院所在地。遵照斯捷克洛夫的委托，他的学生B. И. 斯米尔诺夫(Смирнов)着手印刷A. M. 利亚普诺夫(Ляпунов)论述"重液体不稳定旋转的平衡图形"的手稿(1925，1927)。斯捷克洛夫去世后，苏联科学院出版了纪念他的文集，其中H. M. 京特(Гюнтер)、斯米尔诺夫和另一些学者对他的工作及其在数学发展中的作用进行了分析(1928)。不久根据苏联科学院的决议出版了两卷集的E. И. 佐洛塔廖夫(Золотарев)著作选集(1931—1932)。在1932—1938年，列宁格勒自然科学和技术史研究所出版了自己的十卷集的文献资料和纪念欧拉(1935)和拉格朗日(1937)的选集。研究所在科学院机关的改组中停止工作。与此同时建立了以C. И. 瓦维洛夫(Вавилов)为主席的苏联科学院历史委员会。

在列宁格勒，在正规的研究所之外也进行数学史的研究。由东方学家Б. A. 图拉耶夫(Тураев)开始，以B. B. 斯特鲁韦结束的译读和出版莫斯科数学纸草书原型和德文译本的工作是一项重大事件(1930)。早在1918年，И. A. 奥尔别利(Орбели)就发表了古代珍贵数学遗著的俄文译本——亚美尼亚数学家阿纳尼亚(Анания，7世纪)的习题集。И. Я. 德普曼(Депман)在赫尔岑(Герцен)师范学院开设了数学史课，他的论述初等数学史的通俗课本大受欢迎，一直使用到伟大的卫国战争之后。

30年代中期和后期，在莫斯科和列宁格勒已经形成数学史研究的新方向；古代埃及和巴

比伦数学(卢里耶和维戈茨基)[1] 和古希腊数学，俄国 18 世纪的数学及其教育(尤什克维奇)，变分学前史及早期历史(雷布尼可夫)。

莫斯科和列宁格勒是三十年代的主要研究中心。

在乌克兰有一些学者从事数学史的研究工作。在基辅，M. Ф. 克拉夫丘克(Кравчук)为基辅大学纪念日发表了关于 100 年来基辅大学数学发展的综述文章(1935)，同年还出版了他的一本论述欧拉对数学发展的影响的小册子。Д. A. 格拉韦(Граве)在他的代数分析著作(1939)的第二卷中对丢番图分析、代数数论等方向的历史作出内容丰富的评注。在格拉韦更早的教材及他的通俗《数学百科全书》(1913)中就充满历史知识。格拉韦的工作使他的学生 О. Ю. 施密特(Шмидт)、Б. Н. 杰洛涅(Делоне)和切博塔廖夫对数学史发生了兴趣。

在哈尔科夫大学，Д. M. 辛佐夫(Синцов)继续从事数学史研究。A. K. 乌什克维奇(Ушкевич)在该校讲授数学史课。И. Ю. 季姆琴科(Тимченко)在敖德萨发表了论述对数历史的文章(1935)。在喀山，切博塔廖夫不止一次地注意到一些数学史问题。1932 年在这个城市出版了苏联第一本论述阿拉伯数学的著作—H. B. 尤苏博夫(Юсупов)的《近东算术发展简史》。我们不再列举俄罗斯和乌克兰其它城市的数学史家们的那些工作，但要指出，乌兹别克的 T. H. 卡雷-尼亚佐夫(Кары-Ниязов)，阿美尼亚的彼得罗相和格鲁吉亚的 Д. Г. 茨哈卡亚(Цкакая)在本国数学史的研究方面已经迈出了第一步。

在 1934 年夏季于列宁格勒召开的全苏第二届数学家代表大会上哲学与数学史分组会的报告之中，苏联数学史学派的成就已局部地显示出来。和其它许多科学领域一样，数学史领域的研究在伟大的卫国战争期间也被延搁。为纪念牛顿诞生 200 周年[2] 而出版的文集是这一时期引人注目的事件(1943)。在这本由瓦维洛夫主编的文集中，有 A. H. 克雷洛夫(Крылов)的作为序言的概括性文章，瓦维洛夫论述牛顿的物理原理问题的文章，H. H. 卢津(Лузин)论述牛顿极限理论的文章，切博塔廖夫论述平行四边形方法的发展的文章以及其它一些创造性的工作。

2. 1945 年后数学史研究的组织筹备工作

伟大的卫国战争结束以后，数学史研究首先在莫斯科和列宁格勒明显地活跃起来。1943 年，苏联科学院主席团组建了物理-数学科学史委员会，[3]其主席先后是克雷洛夫(1945 年前)，瓦维洛夫(1950 年前)和斯米尔诺夫。由瓦维洛夫倡导的设立科学院"经典科学作品"丛书是委员会最重要的工作之一，这种丛书至今仍在出版。

亚诺夫斯卡娅在中断三年之后，于 1944 年重新在莫斯科大学数学专业讲授数学史课。与此同时，每一次的定期学术讨论班会议也重新开始，1978 年前该会议的领导者是尤什克维奇。1956 年以后雷布尼科夫领导了讨论班的工作，在亚诺夫斯卡娅调去讲数理逻辑课之后，数学史课由 И. Г. 巴什马科瓦(Башмакова)担任。亚诺夫斯卡娅仍然定期来访问讨论班，并在许多方面决定了讨论班的研究特色。这个讨论班，以及后来关于数学和力学史讨论班长期以来都是联系全苏数学史领域研究人员的主要学术中心。苏联许多城市的和其它国家的学者们

---

① 在这前不久，诺伊格鲍尔的奠基性工作已引起人们对巴比伦数学的注意。

② 应是 300 周年—译者注。

③ 该委员会在 1954 年苏联科学院自然科学和技术史研究所改组后停止活动(有关情形见下文)。

都带着报告来参加讨论班，几乎所有的副博士和博士论文都是在这里事先审议的。这个讨论班现在由巴什马科瓦，雷布尼科夫和 И. А. 秋利娜(Тюлина)领导，它仍然是数学史和力学史研究的主要中心之一。

在莫斯科大学数学专业建立了由雷布尼科夫领导的数学和力学史专业研究室。1960—1963 年，雷布尼科夫为学校编辑了两卷集的教科书《数学史》，1974 年改为一卷再版。

伟大的卫国战争结束后不久，在莫斯科创建了自然科学史研究所(附设列宁格勒分所)，它在 1953 年与科学院技术史委员会合并后改组为苏联科学院自然科学与技术史研究所(ИИЕТ АН СССР)。研究所是联系这一领域内各共和国科学院和各高等学校同类机构的学术机关。В. П. 祖博夫(Зубов)和尤升克维奇最早在这里从事数学史研究，后来其他学者也参加了工作。自然科学与技术史研究所的组织机构几经变革。从 1968 年起，尤什克维奇领导的数学史问题研究小组开始在所里工作。下列数学史各方向的研究工作在这里最活跃：本国数学史(包括苏联科学院的数学发展)；中世纪东方国家和欧洲的数学；分析学的一些分支，如集合论，实变函数论，微分方程，数学物理问题，几何学。

莫斯科大学和自然科学与技术史研究所为培养青年数学史专家做了工作。

1956 年，苏联科学院创建的苏联哲学与科学技术史国家协会起到重要作用。它在各共和国和城市设有大量分会，数学史分会加入了这个协会。

伟大的卫国战争结束后，出版活动相当活跃。在 1948 年，开始出版由 Г. Ф. 雷布金(Рыбкин)和尤什克维奇主编的《数学史研究》年刊，最初它是大学讨论班的刊物，后来成为独立的丛书，而在雷布金去世后(1972)它成为自然科学与技术史研究所的系列出版物之一。到 1980 年，在 25 卷文集中共发表了大约 180 多人苏联和外国数学家和数学史家的 475 篇文章。在这些文集中还刊载了档案库的文献，阿拉伯语、汉语和中世纪拉丁语著作的译文。还有为数不少的数学史论文刊登在 4 卷集(1947—1952)和 10 卷集(1954—1961)的《自然科学与技术史研究所著作》，以及自然科学与技术史研究所的文集《自然科学和技术史问题》中，从 1980 年起，在后者的基础上用同样刊名出版了一种杂志。莫斯科大学从 1960 年开始出版《自然科学的历史和方法论》文集；在 1966—1980 年又出版了由雷布尼科夫主编的 6 部数学和力学史的文集，此外还有两卷《数学和力学史问题》。

在这些出版物中，总共发表了大维 130 篇有关数学史的论文。

在国内的其它城市里也进行数学史领域的研究。上文已经提到在列宁格勒物理-数学科学史委员会的工作和在那里成立的自然科学与技术史分所。苏联科学院列宁格勒档案分馆也做了重要工作，其学术委员会主席是斯米尔诺夫，他是许多数学史论文的作者和一系列集体创作的领导人。在列宁格勒大学，几何学家 А. Д. 亚历山德罗夫(Александров)有时也讲数学史课，他研究方法论和科学史的本质问题；Ф. П. 奥特拉德内赫(Отрадных)在一个时期讲过数学史课。在赫尔岑师范学院，德普曼从事数学史教学，在这个时期内，他进行了有效的科学和文献普及工作。Е. П. 奥日戈娃(Ожигова)、А. А. 基谢廖夫(Киселев)，А. П. 克罗波托夫(Кропотов)、Г. П. 马特维耶夫斯卡娅(Матвиевская，1954 年调到塔什干)和 И. Г. 梅利尼科夫(Мельников)也研究了不同的数学史问题。在(顿河畔)罗斯托夫，有莫尔杜海-博尔多夫斯科伊和别洛泽罗夫(他在罗斯托夫大学讲数学史课)，М. П. 切尔尼亚耶夫(Черняев)及青年学者 В. М. 库兹涅佐夫(Кузнецов)和 М. Б. 纳尔班江(Налбандян)；在萨拉托夫有 Г. П. 博耶夫

(Боев)，在这里出版了《数学史教材》(1956)；在弗拉基米尔，有 Н.Ф. 卡努诺夫(Канунов)；在托木斯克，有 Н.П. 克鲁利科夫斯基(Круликовский)；在喀山，有 Б.П. 拉普捷夫(Лаптев)和 А.П. 诺尔金(Норден)；在伊尔库茨克，有 А.Б. 施特坎(Штыкан)；在约什卡尔奥拉，有 А.Е. 赖克(Раик)；等等。

在乌克兰，数学史研究在很大范围内开展起来。这里早就有数学史研究的传统，到 50 年代基辅则成为数学史研究的重要中心。在这一时期，由 Б.В. 格涅坚科(Гнеденко)倡导，关于数学和数学知识的历史的乌克兰讨论班在乌克兰科学院数学研究所开始工作(1958 年后由 И.З. 什托卡洛〔Штокало〕领导)。1956 年乌克兰科学院数学研究所成立了数学史研究室；1963 年，该研究室合并到乌克兰科学院历史研究所自然科学和技术史的专业机构之中。1959—1963 年该部门出版了 4 卷《数学史文集》(用乌克兰语)，以后，从 1964 年开始出版《自然科学和技术史论文集》(用乌克兰语)。什托卡洛负责编辑以上出版物并是基辅所有数学史作品的领导者，他的直接助手和协作者有 И.Б. 波格列贝斯基(Погребысский，1962 年调来，以前在苏联科学院自然科学和技术史研究所工作)和 А.Н. 博戈柳博夫(Боголюбов)(从 1962 年开始)、后者以后调到乌克兰科学院数学研究所工作。

乌克兰讨论班具有联合会的作用。各共和国的学者经常带着报告来参加讨论班。基辅的数学史家在许多方向，特别是本国数学史领域开展了广泛的工作。他们还吸收苏联其它城市的学者参加研究工作。

在乌克兰，数学史研究不仅在基辅，而且在一系列其它城市也开展起来：在哈尔科夫(Н.Н. 阿希耶泽尔，Э.Я. 巴赫穆茨卡娅，Ю.М. 盖杜克，А.К. 苏什克维奇)，敖德萨(С.Н. 基洛)，尼古拉耶夫(Ю.А. 别雷)，波尔塔瓦(В.В. 利欣)，顿涅茨克(Ю.Ф. 科索拉波夫，А.И. 博罗金)，切尔诺夫策(Н.И. 西蒙诺夫，他相继调到基辅和莫斯科工作)等地。

在加盟共和国的其它城市里研究工作进行得也很顺利。在明斯克有 Н.П. 叶鲁金和 А.А. 克萨克，在格罗德诺有 Н.Д. 别斯帕米亚特内赫，在布列斯特有 М.Г. 施拉耶，在里加有 А.Д. 梅什基斯(现在莫斯科工作)、И.М. 拉比诺维奇和 Л.Э. 赖津，在维尔纽斯有 З.Ю. 热迈蒂斯，在塔尔图有 Ю.Г. 卢米斯杰和 Г.Н. 里亚戈，在巴库有 А.Г. 阿利耶夫，Ф.А. 卡孙哈诺夫，Г.Д. 马梅德别伊利，З.И. 哈利洛夫和 Б.А. 罗森菲尔德(现在莫斯科工作)，在第比利斯有 Д.Г. 茨哈卡娅、Г.С. 乔戈什维利，Л.П. 戈基耶利等，在埃里温有 Г.Б. 彼得罗相，А.Г. 阿布拉米扬，А.М. 叶加尼扬，О.А. 让特科夫和 А.К. 库别索夫，在杜尚别—Х.У. 萨德科夫和 Г.С. 索比罗夫，在摩尔维亚共和国有 В.П. 贝奇科夫，Г.И. 格雷泽尔等。

在塔什干之所以出现研究中亚各民族数学史的重要中心，开始是由于 Т.Н. 卡雷-尼亚佐娃的工作，而后来是 В.Н. 斯米尔诺夫的女学生 Г.П. 马特维耶夫斯卡娅的工作，后者于 1959 年调到乌兹别克科学院数学研究所工作，主要研究近东和中东的数学问题。现在塔什干还有很大一批科学史家在这个领域工作；在这里出版了穆罕默德·阿尔-花拉子米的阿尔-比鲁尼的著作，许多阿拉伯文手稿第一次被研究；某些工作是与莫斯科，杜尚别，阿拉木图及其它城市的学者合作进行的。在塔什干，С.Х. 西拉日季诺夫也十分注意这个范围内的问题。

能够促进学者间的合作，加速思想和规划交流的学术会议在数学史研究中起到越来越大的作用。1947 年 12 月，苏联科学院自然科学和技术史研究所在莫斯科召开了自然科学史全苏会议；而在 1949 年，在列宁格勒由 С.И. 瓦维洛夫主持召开了人数众多的会议，在会上讨论

了科学技术史的迫切任务。在这些会议上数学史分组会进行了工作。在莫斯科(1956)和列宁格勒(1961)召开的第三届和第四届数学家代表大会上，数学史分组会也进行了工作。莫斯科大学和其它高等学校，如第比利斯大学，从1960年开始举行高校物理-数学科学史代表会议。1956年在莫斯科，由苏联科学院自然科学与技术史研究所，以及苏联历史与哲学、自然科学与技术国家协会举行了自然科学和技术史全苏代表会议。后来这个协会的全会就成为定期的。在这种会议期间，时常举行数学史分组会。在列宁格勒、基辅、波罗的海沿岸和外高加索地区的共和国首都，吸收其它城市学者参加的类似的地方性会议已成为惯例。在1973年，苏联科学院自然科学与技术史研究所举办了关于19世纪和20世纪数学史的学习班(塔尔图)，在1978年举办了关于物理和数学在发展中的相互关系的第二期学习班(利耶帕亚)。许多数学专家参加了这些学习班的工作。

苏联的数学史家参加了多种国际学术讨论会，代表会议和各种会议。首批会议是第八届国际科学史代表大会(佛罗伦萨-米兰，1956)—B. П. 祖博夫以题为"关于俄国11至17世纪'不可约量'和连续统理论"的报告出席了会议，以及民主德国科学院纪念欧拉诞生250周年的会议(1957)。在莫斯科举行的国际数学家代表大会上(1966)，数学史和数学教育分组会按惯例进行工作，还召开了"中世纪东方国家的数学及其与欧洲国家数学的相互联系学术讨论会。"A. П. 尤什克维奇作了展望中世纪东方数学史研究的综合报告。在第9－17届国际科学史代表大会上(1959－1980)，苏联学者提交了大量的数学史学术报告，其中第13届会议在莫斯科举行(1971)。加强与外国科学史家的联系，这增强了在筹备某些出版物过程中的合作，使俄文书籍和论文在外国的译本数目得以增加。

这一时期出版了从古代到本世纪中期著名数学家的科学遗著。甚至不用完全列举这些出版物就能说明这一领域的学者们卓有成绩的工作。例如，出版了 Н. Н. 罗巴切夫斯基，П. Л. 切比雪夫，Г. Ф. 沃罗诺伊，Н. 博利，A. Н. 克雷洛夫，П. С. 乌雷松、Н. Н. 卢津，О. Ю. 施密特的著作全集。

在"经典科学作品"丛书中发表了伽利略、笛卡儿、牛顿、蒙日、高斯、柯瓦列夫斯卡娅、利亚普诺夫、A. A. 马尔科夫(老的)、庞加莱的部分著作和选集；此外，该丛书还出版了欧几里得的《原本》，阿基米德、丢番图、阿尔-花拉子米、阿尔-比鲁尼、阿尔-法拉比、奥玛·海亚姆、奥雷姆、阿尔-卡西、哥白尼、莱布尼茨、欧拉、J. 鲍尔约、黎曼、希尔伯特的著作，A. A. 马尔科夫(老的)、A. M. 利亚普诺夫、Н. Я. 索宁、Н. M. 京特、Д. Ф. 叶戈罗夫、Н. Н. 卢津、Н. Н. 普里瓦洛夫等人的论文集。以故著名学者的著作再版，包括他们生前未公开发表过的手稿(其中有书信形式的)一这些工作都是科学史研究的重要组成部分。我们强调指出，无论是数学家还是历史学家的注释，以及作为这些出版物附件的论文都有很高的学术水平。一些著名数学家和数学史家参加了这些出版物的写作。

为研究本国数学家在档案馆的遗著和发掘他们以前不为人知的学术、组织和教育各方面的实践活动，也做了许多工作。对主要保存在苏联科学院档案馆的欧拉手稿进行了大量研究。这些工作是与民主德国、法国和瑞士的学者共同完成的。其初步成果是：1959－1979年出版的全面论述这些资料的作品，以及专门论述学者全部书信的作品、发表他的5卷学术和事务上的通信集。所有这些出版物包含以往无人知晓的揭示欧拉创作道路的珍贵资料和他的一些通信者，如克莱罗、达朗贝尔、拉格朗日和其他学者；还有在彼得堡、柏林、巴黎科学院和一系列

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948，1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948，1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948，1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的 15 册、意大利的 6 册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的 15 册、意大利的 6 册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948，1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948，1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的 15 册、意大利的 6 册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著:奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948,1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。

大学的活动等。

我们不想列举全部工作，但需要指出罗巴切夫斯基的两卷科学教育学遗著(1948，1976)，奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫和斯捷克洛夫的各种档案材料，一些数学家的通信集的出版(一些人是完整的，另一些人是局部的)、数学家们未发表的论文的搜集工作(这些情况见下文)。

还应指出关于图书文献方面的工作。除了苏联大百科全书第三版、两种图书目录大辞典(美国的15册、意大利的6册)中的参考文章，除了著作选集的内容简介和《数学科学成就》、《中学数学》杂志中的大量纪念文章和悼念文章外，我们要指出论述下列数学家的一系列专著：奥玛·海亚姆、拉米斯、伽利略、笛卡儿、帕斯卡、惠更斯、牛顿、蒙日、罗巴切夫斯基、奥斯特罗格拉茨基、切比雪夫、佐罗塔廖夫、柯瓦列夫斯卡娅、勒贝格、外尔、沃尔泰拉、波莱尔、斯捷克洛夫等。